Эффективные методы глобальной оптимизации для решения задач оптимального управления*

К.А. Баркалов, М.А. Кочеганова, С.А. Бевзюк, А.А. Федюков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача поиска H_∞-динамического регулятора для обратного маятника с подвижным основанием. Известно [1], что решение данной задачи сводится к разрешимости системы матричных неравенств, часть из которых является невыпуклыми. В качестве численного примера построен регулятор первого порядка для перевернутого маятника на тележке.

Рассмотрим плоский перевернутый маятник с подвижным основанием (маятник на тележке). Пусть звено маятника имеет длину l, масса на конце звена равна m, а угол отклонения звена маятника от вертикали обозначим φ. Предположим, что на тележку действуют две силы: под действием неизвестной внешней силы $V(t_c)$ она смещается относительно начала координат на величину x_1, а создаваемая нами управляющая сила $U(t_c)$ смещает тележку на величину x_2.

Вводя обозначения $x = [\varphi, \dot{\varphi}]^T$, $t = t_c\sqrt{g/l}$, $v(t) = -\ddot{x}_1/l$, $u(t) = -\ddot{x}_2/l$, можно записать линеаризованные уравнения движения изучаемого объекта в виде

$$\dot{x} = Ax + B_1 v + B_2 u, \qquad x(0) = 0, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что доступен измерению только угол φ отклонения маятника от вертикали. Обозначим измеряемый выход системы y и наблюдаемый выход системы z как

$$\begin{gathered} y = C_2 x, \\ z = C_1 x + D_1 u, \end{gathered} \tag{2}$$

где матрицы C_1, C_2, D_1 зависят от уравнений (1).

Задача гашения колебаний состоит в нахождении матрицы

$$\theta = \begin{bmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{bmatrix}$$

параметров динамического регулятора (здесь $x_r \in R^1$ – состояние регулятора)

$$\begin{gathered} \dot{x}_r = a_r x_r + b_r y \\ u = c_r x_r + d_r y \end{gathered}$$

обеспечивающего выполнение неравенства

$$\sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|^2}{\|v\|^2} < \gamma^2 \tag{3}$$

с возможно меньшим значением $\gamma > 0$, а в отсутствии возмущений – асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Минимальное значение γ, которое удовлетворяет неравенству (3) называют *уровнем гашения возмущений* в объекте [2].

Известно [1], что для существования регулятора с заданным $\gamma > 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовала 3×3 матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая следующим двум матричным неравенствам

$$\begin{gathered} W_P^T \begin{bmatrix} A_0^T X + X A_0 & X B_0 & C_0^T \\ B_0^T X & -\gamma I & 0 \\ C_0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} W_P < 0, \\ W_R^T \begin{bmatrix} X^{-1} A_0^T + A_0 X^{-1} & B_0 & X^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & 0 \\ C_0 X^{-1} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} W_R < 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где W_P, W_R, A_0, B_0, C_0 – матрицы, однозначно определяющиеся из (1) и (2), I – единичная матрица, а γ – искомый уровень гашения возмущений из (3).

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00242.

Если условия (4) выполнены и такая матрица X найдена, то параметры θ искомого регулятора находятся как решение линейного матричного неравенства

$$\psi + P^T\theta^T Q + Q^T\theta P < 0,$$

где матрицы ψ, P, Q зависят от найденного решения X.

Отметим, что второе неравенство в (4) не является выпуклым, т.к. зависит от обратной матрицы X^{-1}. Следовательно, оно не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство не позволяет решить данную задачу стандартными методами выпуклой оптимизации в сочетании с методами решения линейных матричных неравенств, реализованными, например, в MATLAB Robust Toolbox [3]; требуется использование методов, обладающей сходимостью к глобальному экстремуму.

В ННГУ им. Н.И. Лобачевского разработан эффективный подход к построению параллельных методов глобальной оптимизации [4]. В рамках данного подхода решение многомерной задачи сводится к решению нескольких задач меньшей размерности, решение которых может проводиться параллельно. Под размерностью понимается число неизвестных параметров в задаче. Для редукции размерности используются кривые Пеано (*развертки*), однозначно отображающие отрезок вещественной оси $[0,1]$ на n-мерный гиперкуб. Распараллеливание процесса поиска может быть организовано несколькими способами, ориентированными на использование систем с общей и распределенной памятью, а также – ускорителей вычислений. Все указанные методы реализованы в параллельной программной системе Globalizer [5].

В настоящий момент с использованием системы Globalizer решена модельная задача, размерность которой была равна семи $(N = 7)$. Найдены параметры регулятора θ и соответствующее им минимальное значение уровня гашения возмущений γ.

Время решения данной задачи на компьютере с CPU Intel Core i7 (3.6 GHz) в последовательном режиме составило 125 сек., в параллельном режиме с использованием 4 ядер – 82 сек.; ускорение по времени составило 1.5 раз.

Дальнейшие исследования будут связаны с повышением эффективности распараллеливания решающих правил оптимизационного алгоритма, а также с поиском динамических регуляторов для задач вида (1) большой размерности. Отметим, что вычисление ограничений (4) сводится к обращению матрицы X и поиску собственных чисел матриц из правой части ограничений, что при решении задач большой размерности за приемлемое время потребует использования нескольких узлов вычислительного кластера.

Литература

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 281 с.

2. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6, С. 20–38.

3. MathWorks: Linear Matrix Inequalities. URL: https://www.mathworks.com/help/robust/linear-matrix-inequalities.html (accessed: 15.04.2019)

4. Стронгин Р.Г. Гергель В.П. Гришагин В.А. Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Издательство Московского университета, 2013. 280 с.

5. Gergel V., Barkalov K., Sysoyev A. Globalizer: A Novel Supercomputer Software System for Solving Time-Consuming Global Optimization Problems // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2018. vol. 8(1), P. 47–62.