

# Решение задачи волновой томографии с граничными условиями Неймана на суперкомпьютере\*

С.Ю. Романов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Статья посвящена разработке эффективных итеративных методов решения обратных задач волновой томографии. Вычисление производной Фреше включает решение прямой и сопряженной задачи с граничными условиями Неймана. Для численных расчетов разработаны эффективные итерационные методы, в которых решение находится с использованием данных волнового поля и его нормальной производной на границе. Значения нормальной производной находится с помощью решения внешней краевой задачи с граничными условиями Дирихле. Эффективность такого подхода проиллюстрирована решением модельных задач. Разработанные алгоритмы ориентированы на использование суперкомпьютеров.

*Ключевые слова:* ультразвук, коэффициентные обратные задачи, суперкомпьютер, волновая томография.

## 1. Введение

Томографические методы исследования широко применяются в медицине, неразрушающем контроле в промышленности, микроскопии, инженерной сейсмике, гидролокации [1-3]. Одной из важнейших проблем в медицине является ранняя диагностика заболеваний рака молочной железы. Разработку ультразвуковых томографов для этих целей ведут научные группы США, Германии, России [4-9]. Одной из проблем ультразвуковой томографии является разработка методов решения нелинейных обратных задач.

В настоящей работе обратная задача волновой томографии рассматривается в рамках скалярных волновых моделей. В рамках таких моделей существует два подхода к решению задач волновой томографии. Первый из них базируется на интегральном представлении функции Грина [10-11]. Как показывают исследования, численная реализация алгоритмов решения в трехмерном случае для этого подхода требует слишком большого количества вычислений [12, 13]. Второй подход к решению задач волновой томографии базируется на дифференциальном представлении задачи. В этом подходе используются итерационные градиентные методы решения. В работах [14, 15, 8] получено выражение для градиента итерационного процесса.

Для вычисления градиента в приведенной в статье постановке необходимо знать на границе области неоднородности  $\partial\Omega$  рассеянное неоднородностью в ходе эксперимента волновое поле  $u(r,t)$  и его нормальную производную к границе  $\partial_n u$ . Существуют акустические датчики, позволяющие измерять как волновую функцию  $u(r,t)$ , так и ее нормальную производную [16, 17]. Существует и другая возможность, когда с использованием волновой функции, измеренной на границе  $\partial\Omega$ , с помощью решения внешней краевой задачи восстанавливается значение нормальной производной на границе  $\partial\Omega$ . Именно этот подход исследуется в настоящей статье.

Решение обратных задач волновой томографии является сложной вычислительной задачей и требует использование суперЭВМ. Разработанные в работах [8, 9] алгоритмы и программы ориентированы на использование суперЭВМ как на процессорах общего назначения, так и на графических картах. Эффективность разработанных алгоритмов иллюстрируется на модельных задачах.

## 2. Постановка обратной задачи волновой томографии

---

\* Исследования поддержаны РФФИ (грант 14-07-00078 а).

Перейдем к постановке обратной задачи. Рассмотрим «основную» задачу, которая с помощью волнового уравнения, описывает акустическое поле  $u(r, t)$  в области  $\Omega \times (0, T)$

$$c(r)u_{tt}(r, t) - \Delta u(r, t) = 0. \quad (1)$$

Кроме того, допустим, что  $u(r, t)$  - удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$u(r, t=0) = u_t(r, t=0) = 0, \quad \partial_n u|_{\Gamma} = p(s, t). \quad (2)$$

Здесь  $\partial_n u|_{\Gamma}$  - производная вдоль нормали к поверхности  $\partial\Omega$ ,  $p(s, t)$  - известная функция, заданная на  $\Gamma$  ( $(s, t) \in \partial\Omega \times (0, T) = \Gamma$ ). Предполагается, что неоднородность среды связана только с изменениями скорости  $c^{-0.5}(r) = v(r)$ , а вне области неоднородности  $c(r) \equiv c_0 = const$ , где  $c_0$  - известна. Обратная задача состоит в нахождении описывающей неоднородность функции  $c(r)$  в области  $\Omega$ , по экспериментальным данным «измерения» волны  $U(s, t) = \bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$  на границе  $\partial\Omega$  за время  $(0, T)$  при различных положениях источника

**Рис.1.** Введем функционал невязки на множестве функций  $c(r) \in Y$

$$\Phi(u^j(c)) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial\Omega} (u^j(s, t) - U^j(s, t))^2 ds dt. \quad (3)$$

Здесь  $u^j(c)$  - решение задачи (1)-(2) при некотором  $c(r)$ ; индекс  $j=1, \dots, M$  - отвечает разным положениям источника (в дальнейшем для простоты  $j$ , как правило, писать не будем). Обратная задача ставится как задача поиска функции  $\bar{c}(r) \in Y$ , минимизирующей функционал невязки  $\bar{c}(r)$ :  $\min_{c(r) \in Y} \Phi(u(c)) = \Phi(u(\bar{c}))$ .

Рассмотрим задачу, которую назовем «сопряженной» к «основной» задаче (1)-(2)

$$c(r)w_{tt}(r, t) - \Delta w(r, t) = 0, \quad w(r, t=T) = w_t(r, t=T) = 0, \quad \partial_n w|_{\Gamma} = u|_{\Gamma} - U, \quad (4)$$

где  $u$  - есть решение задачи (1)-(2),  $U(s, t)$  - экспериментальные данные «измерения» волны  $\bar{u}(r, t)|_{\Gamma}$ . Тогда производная Фреше для функционала  $\Phi(u(c))$ , задаваемого выражением (3), имеет вид [18-21]

$$\Phi'(u^j(c), dc) = \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} \left\{ \int_0^T w_t^j(r, t) u_t^j(r, t) dt \right\} dc(r) dr, \quad (5)$$

где  $u^j$  - есть решение «основной» задачи (1)-(2), а  $w^j$  - есть решение «сопряженной» задачи (4) для некоторого положения источника  $j$ .

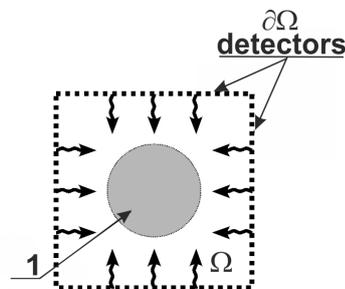
### 3. Численное моделирование в задачах 2D волновой томографии

Цель модельных экспериментов состоит в оценке эффективности алгоритмов решения обратной задачи в постановке (1)-(2). В этом случае для реализации алгоритмов решения обратной задачи необходимо знать граничное условие Неймана (2), т.е. производную по нормали от волновой функции на границе  $\Gamma$ . Чисто теоретически существуют датчики, которые позволяют измерять как волновое поле, так и его производную по нормали на границе. Однако на практике наиболее распространенными являются датчики, измеряющие значение волнового поля. В

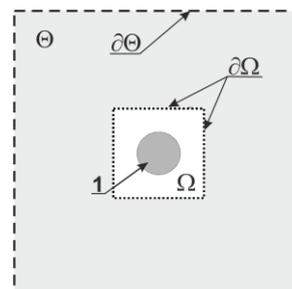
этом случае значения производной по нормали на границе можно вычислить, решая внешнюю краевую задачу. Именно этот подход и использовался при решении модельных задач в настоящей работе.

Рассмотрим двумерные задачи ультразвуковой томографии, описываемые математической моделью (1). Будем использовать разработанные и описанные в [8, 9, 13, 22, 23] численные методы, программы и градиентные итерационные процедуры восстановления  $c(r)$  построенные, на основе явного представления для производной Фреше (5) функционала невязки. В силу большого объема вычислений наиболее эффективно рассматриваемые обратные задачи решаются с использованием суперкомпьютеров. Суперкомпьютеры позволяют решать задачи на сетке до нескольких тысяч точек по каждой координате в восстанавливаемом слое, в настоящей работе моделирование проводилось на равномерной расчетной сетке  $500 \times 500$  точек. Для модельных расчетов использовалось небольшое количество ядер равное 256, что позволяет уменьшить время расчетов в  $\sim 100$  раз по сравнению с расчетами на одном ядре.

На **Рис. 1** приведена условная схема эксперимента для простоты для 4 источников. Исследуемая область, содержащая неоднородности и обозначенная цифрой 1, расположена в центре квадрата расчетной области  $\Omega$  и окружена средой с известной скоростью  $v_0=1500$  м/с. Зондирование выполнялось плоскими волнами перпендикулярно сторонам квадрата через 90 градусов (в случае 4 источников). Источник излучает короткий импульс длительностью 1.5-2 периода. Приемники излучения расположены по периметру области расчетов во всех точках границы  $\partial\Omega$  квадратной области расчетов  $\Omega$ .



**Рис. 1.** Условная схема модельного эксперимента



**Рис. 2.** Условная схема модельного расчета внешней краевой задачи

Экспериментальные исследования проводились на компьютерно-синтезированном 2D объекте с модельными неоднородностями, приведенными на **Рис. 3а**. Минимальный размер неоднородности 3мм. Вариация скорости  $v(x, y)$  не превышала 20%. Выбранные диапазоны вариации параметров соответствуют диапазонам изменения в мягких тканях человека [24].

В ходе модельных расчетов сначала решалась прямая задача Коши (1) распространения ультразвуковой волны в  $R^2$  и сохранялись экспериментальные данные  $U(s, t)$  на границе  $\Gamma$ . Вне области неоднородности предполагалась однородная среда с известной постоянной скоростью. Для численных расчетов выбирается настолько большая область  $\Theta$  (примерно в 4-5 раз больше  $\Omega$ ), чтобы отражение от границы  $\partial\Theta$  за время  $T$  не успевало дойти до границы  $\partial\Omega$ .

По полученным данным  $U(s, t)$  решалась обратная задача. При решении обратной задачи в приведенных ниже расчетах использовались граничные условия Неймана (2)  $\partial_n u(r, t)|_{\Gamma} = p(s, t)$ , где  $p(s, t)$  — некоторая функция. Эти граничные условия предполагаются в выражении для производной Фреше (5) для задачи (1)-(2). Это означает, что для восстановления скоростного разреза необходимо использовать значения как  $\bar{u}(r, t)|_{\Gamma} = U(s, t)$ , так и  $\partial_n \bar{u}(r, t)|_{\Gamma} = p(s, t)$  на границе  $\Gamma$ . Функцию  $p(s, t)$  можно найти с помощью процедуры, которая состоит в следующем. По экспериментальным данным  $U(s, t)$  на границе  $\Gamma$  решаем внешнюю для области  $\Omega$  задачу (6)-(7) для «большой» области  $\Theta / \Omega \times (0, T)$  с граничными значениями  $U(s, t)$  на  $\partial\Omega \times (0, T)$  и нулевыми граничными значениями на внешней границе  $\partial\Theta \times (0, T)$  для известного свободного члена  $f(r, t)$

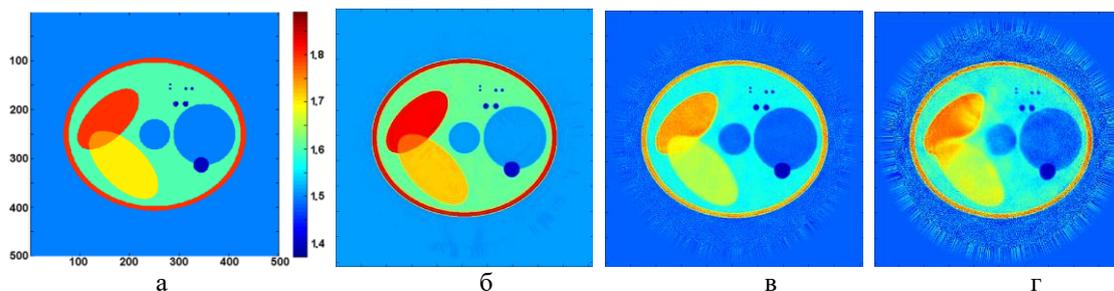
$$c_0 u_{tt}(r, t) - \Delta u(r, t) = f(r, t), \quad (6)$$

$$u(r, t = 0) = u_t(r, t = 0) = 0, \quad u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = U(s, t), \quad u|_{\partial\Theta \times (0, T)} = 0. \quad (7)$$

Схема областей расчета внешней краевой задачи приведена на **Рис. 2**. Область  $\Theta$  ( $\Omega \subset \Theta$ ) выбирается настолько большой, чтобы отражение от границы  $\partial\Theta$  за время  $T$  не успевало дойти до границы  $\partial\Omega$ . В области  $\Theta/\Omega$  по условию скорость постоянна и известна. В результате получим  $\bar{u}(r, t)$  на  $\Theta/\Omega \times (0, T)$ , из которой можно найти  $\partial_n \bar{u}(r, t)|_{\Gamma} = p(s, t)$ . Описанная процедура нахождения функции  $p(s, t)$  использовалась в приведенных ниже расчетах в двумерном случае. В этой процедуре использовались данные  $U(s, t)$  как без дополнительно добавленного случайного шума, так и с шумом.

На **Рис. 3а** приведена модельная функция скорости распространения ультразвуковой волны  $v(x, y)$  в исследуемом объекте. На **Рис. 3б** приведены результаты реконструкции скоростного разреза в задаче (1)-(2). Реконструированные изображения получены с точными данными  $U(s, t)$  на  $\partial\Omega \times (0, T)$ . Значение нормальной производной  $\partial_n u(r, t)|_{\Gamma}$  получены в результате решения внешней краевой задачи. В итерационном процессе использовался градиент функционала невязки в соответствии с формулой (5), количество итераций - 700. Для решения обратной задачи использовался итерационный процесс с начального приближения  $c(r) = \text{const} = c_0$  - известной вне области неоднородности. Центральная длина волны зондирующего импульса составляла 5 мм. Зондирование исследуемой области  $\Omega$  выполнялось последовательно плоскими короткими импульсами с 16 сторон через 22.5 градуса. Расчеты проводились на сетке  $500 \times 500$  точек на области  $20 \times 20$  см, параметр Куранта равен 3. Функция  $U(s, t)$  предполагалась известной во всех точках границы квадратной области расчетов. Видно, что в случае, если ошибка задания входных данных отсутствует, скоростной разрез восстанавливается идеально.

На **Рис. 3в** приведены результаты реконструкции скоростного разреза и поглощения при уровне погрешности входных данных  $U(s, t)$  порядка 2% от амплитуды. Реконструированные изображения получены после 400 итераций в задаче (1)-(2). На **Рис. 3г** приведены реконструированные изображения при 5% ошибке входных данных после 400 итераций.



**Рис.3.** Модельная функция скорости  $v(r)$  (а); реконструированное изображение  $v(r)$ : по точным данным (б); с 2% шумом в данных (в); с 5% шумом в данных (г)

Как видно из **Рис. 3**, качество реконструированных изображений существенно зависит от уровня погрешности  $U(s, t)$ , что связано с необходимостью вычисления нормальной производной на границе по данным на детекторах  $U(s, t)$ , заданным с ошибкой.

Расчеты проводились на вычислительных узлах CPU суперкомпьютера «Ломоносов» Суперкомпьютерного центра МГУ им. М.В. Ломоносова. Время расчета одной обратной задачи с 16 источниками на 256 вычислительных ядрах для 700 итераций составило около 1-2 часов, что вполне приемлемо для приложений в медицине. Вопросы эффективности и масштабируемости выполнения программы рассмотрены в работе [21].

#### 4. Выводы

1. Разработаны эффективные численные алгоритмы решения задач волновой томографии. В рассмотренной постановке восстановления скоростного разреза  $v(r)$  необходимо знать как значения волнового поля, так и значения нормальной производной волнового поля на границе области  $\partial\Omega$ , которую предложено вычислять с помощью решения внешней краевой задачи.

2. Модельные расчеты показывают состоятельность предложенных численных методов. По данным волнового поля с помощью решения внешней краевой задачи удается реконструировать нормальную производную поля на границе  $\partial\Omega$ . Показано, что при небольших погрешностях  $\sim 1-2\%$  входных данных на детекторах можно восстанавливать скоростной разрез.

3. Разработанные алгоритмы допускают высокий уровень распараллеливания вычислений и являются высокомасштабируемыми. Алгоритмы ориентированы на использование суперкомпьютеров как на CPU, так и на GPU [21]. По своим техническим характеристикам суперкомпьютеры на GPU, в отличие от суперкомпьютеров на CPU, уже вполне могут включаться в томографические комплексы. Благодаря огромным объемам выпуска и, следовательно, низкой цене, графические процессоры стали оптимальным решением для широкого круга вычислительных задач [25-27] и уже используются для решения задач ультразвуковой томографии [4, 6, 28-32].

## Литература

1. Bazulin A.E., Bazulin E.G., Vopilkin A.K., Kokolev S.A., Romashkin S.V., Tikhonov D.S. Application of 3D coherent processing in ultrasonic testing // Russian journal of nondestructive testing. 2014. Vol. 50, No. 2. P. 92-108.
2. Levin G.G., Vishnyakov G.N., Minaev V.L., Latushko M.I., Pickalov V.V., Belyakov V.K., Sukhenko E.P., Demyanenko A.V. Shearing interference microscopy for tomography of living cells // Proceedings of SPIE. 2015. Vol. 9536. P. 95360G.
3. Matej S., Fessler J.A., Kazantsev I.G. Iterative tomographic image reconstruction using fourier-based forward and back-projectors // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2004. Vol.23. P. 401.
4. Duric N., Littrup P., Li C., Roy O., Schmidt S., Janer R., Cheng X., Goll J., Rama O., Bey-Knight L., Greenway W. Breast ultrasound tomography: Bridging the gap to clinical practice. // Proc. SPIE. Medical Imaging: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. 2012. Vol. 8320. P. 83200O.
5. Jiřík R., Peterlík I., Rüter N., Fousek J., Dapp R., Zapf M., Jan J. Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2012. Vol. 59. P. 254–64.
6. Wiskin J., Borup D., Andre M., Johnson S., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J. Three-dimensional nonlinear inverse scattering: Quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // J. Acoust. Soc. Am. 2013. Vol. 133. P. 3229.
7. Burov V.A., Zotov D.I., Rummyantseva O.D. Reconstruction of the sound velocity and absorption spatial distributions in soft biological tissue phantoms from experimental ultrasound tomography data // Acoustical Physics. 2015. Vol. 61, No. 2. P. 231–248.
8. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Probl. 2013. Vol. 29, No. 7. P. 075004.
9. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Phys. Med. Biol. 2014. Vol. 59, No. 8. P. 1979–2004.
10. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. Inverse Problems for Maxwell's Equations. Utrecht: VSP, 1994.
11. Goncharskii A.V., Ovchinnikov S.L., Romanov S.Y. On the one problem of wave diagnostic // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2010. Vol. 34, No. 1. P. 1-7.
12. Lavarello R.J., Oelze M.L. Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted born iterative method // IEEE Trans. Med. Imaging. 2009. Vol. 28. P. 1643–1653.

13. Goncharkii A.V., Romanov S.Y. Two approaches to the solution of coefficient inverse problems for wave equations // *Comput. Math. Math. Phys.* 2012. Vol. 52. P. 245–251.
14. Natterer F. Numerical Solution of Bilinear Inverse Problems // Preprints "Angewandte mathematik und informatik" Munster. 1996. No. 19/96-N.
15. Beilina L., Klibanov M.V., Kokurin M.Y. Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem // *J. Math. Sci.* 2010. Vol. 167. P. 279–325.
16. Berliner M.J., Lindberg J.F. Acoustic Particle Velocity Sensors: Design, Performance, and Applications // American Institute of Physics. 1996. Vol. 368.
17. Shipps J.C., Deng K. A miniature vector sensor for line array applications // *OCEANS 2003. Proceedings.* 2003. Vol. 5. P. 2367-2370.
18. Natterer F., Sielschott H., Dorn O., Dierkes T., Palamodov V. Fréchet Derivatives for Some Bilinear Inverse Problems // *SIAM J. Appl. Math.* 2002. Vol. 62, No. 6. P. 2092–2113.
19. Natterer F. Sonic Imaging // In: *Handbook of Mathematical Methods in Imaging.* New York: Springer-Verlag. 2015. P. 1253–1278.
20. Beilina L., Klibanov M.V. Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York: Springer, 2012. 407 p.
21. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С.Ю. Суперкомпьютерные технологии в задачах проектирования томографических диагностических комплексов. СПб: Издательство Политехнического университета, 2016. 230 с.
22. Агаян Г.М., Воеводин Вад В., Романов С.Ю. О применимости послойных моделей в решении трехмерных задач ультразвуковой томографии // *Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии.* 2013. Т. 14, № 1. С. 533-554.
23. Goncharkii A.V., Romanov S.Y. and Seryozhnikov S.Y. A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // *Ultrasonics.* 2016. Vol. 67. P. 136–150.
24. Hendee W.R., Ritenour E.R. *Medical Imaging Physics.* New York: Wiley, 2002.
25. Yuen D.A., Wang L., Chi X., Johnsson L., Ge W., Shi Y., editors. *GPU Solutions to Multi-scale Problems in Science and Engineering. Lecture Notes in Earth System Sciences.* Berlin Heidelberg: Springer. 2013.
26. Li C., Sandhu G.S., Roy O., Duric N., Allada V., Schmidt S. Toward a practical ultrasound waveform tomography algorithm for improving breast imaging // *Proc. SPIE 9040, Medical Imaging 2014: Ultrasonic Imaging and Tomography, 90401P.*
27. Schmidt S., Gade-Nielsen N. F., Høstergaard M., Dammann B., Kazantsev I. G., High Resolution Orientation Distribution Function // *Materials Science Forum.* 2012. Vols. 702-703. P. 536-539.
28. Birk M., Dapp R., Rüter N.V., Becker J. GPU-based iterative transmission reconstruction in 3D ultrasound computer tomography // *J. Parallel Distrib. Comput.* 2014. Vol.74. P. 1730–1743.
29. Goncharkii A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // *Wave Motion.* 2014. Vol. 51, No. 3. P. 389-404.
30. Natterer F. Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // In: *Contemporary Mathematics.* 2011. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society. P. 151–162.
31. Romanov S.: Research of tomographic schemes of low-frequency ultrasonic diagnostics on supercomputers . Proc. of the 1st Russian Conference on Supercomputing (RuSCDays 2015), Moscow, Russia, September 28-29, 2015, CEUR-WS.org, online CEUR-WS.org/Vol-1482/199.pdf44.
32. Goncharkii A.V., Romanov S.Yu, Seryozhnikov S.Yu Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography // *Doklady Physics.* 2016. Vol. 61, No. 5. P. 211-214.

## Solution of wave tomography problem with Neumann boundary conditions on supercomputer

S.Y. Romanov

Lomonosov Moscow State University

The efficient iterative methods for solving inverse problems of wave tomography were developed. The computation of the Fréchet derivative includes solving both the direct and the conjugate problems with the Neumann boundary condition. The efficient methods for numerical computations where the solution is found using the detector measurements of the wave field and its normal derivative were developed. The wave field normal derivative values at detector locations are found by solving the exterior boundary value problem with the Dirichlet boundary conditions. The efficiency of this approach by applying it to model problems was illustrated. The algorithms developed are designed to be run on supercomputers.

*Keywords:* ultrasound, coefficient inverse problems, supercomputer, wave tomography.

### References

1. Bazulin A.E., Bazulin E.G., Vopilkin A.K., Kokolev S.A., Romashkin S.V., Tikhonov D.S. Application of 3D coherent processing in ultrasonic testing // Russian journal of nondestructive testing. 2014. Vol. 50, No. 2. P. 92-108.
2. Levin G.G., Vishnyakov G.N., Minaev V.L., Latushko M.I., Pickalov V.V., Belyakov V.K., Sukhenko E.P., Demyanenko A.V. Shearing interference microscopy for tomography of living cells // Proceedings of SPIE. 2015. Vol. 9536. P. 95360G.
3. Matej S., Fessler J.A., Kazantsev I.G. Iterative tomographic image reconstruction using fourier-based forward and back-projectors // IEEE Transactions on Medical Imaging. 2004. Vol.23. P. 401.
4. Duric N., Littrup P., Li C., Roy O., Schmidt S., Janer R., Cheng X., Goll J., Rama O., Bey-Knight L., Greenway W. Breast ultrasound tomography: Bridging the gap to clinical practice. // Proc. SPIE. Medical Imaging: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. 2012. Vol. 8320. P. 83200O.
5. Jiřík R., Peterlík I., Ruiter N., Fousek J., Dapp R., Zapf M., Jan J. Sound-Speed Image Reconstruction in Sparse-Aperture 3-D Ultrasound Transmission Tomography // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2012. Vol. 59. P. 254–64.
6. Wiskin J., Borup D., Andre M., Johnson S., Greenleaf J., Parisky Y., Klock J. Three-dimensional nonlinear inverse scattering: Quantitative transmission algorithms, refraction corrected reflection, scanner design, and clinical results // J. Acoust. Soc. Am. 2013. Vol. 133. P. 3229.
7. Burov V.A., Zotov D.I., Rumyantseva O.D. Reconstruction of the sound velocity and absorption spatial distributions in soft biological tissue phantoms from experimental ultrasound tomography data // Acoustical Physics. 2015. Vol. 61, No. 2. P. 231–248.
8. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Supercomputer technologies in inverse problems of ultrasound tomography // Inverse Probl. 2013. Vol. 29, No. 7. P. 075004.
9. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. Inverse problems of ultrasound tomography in models with attenuation // Phys. Med. Biol. 2014. Vol. 59, No. 8. P. 1979–2004.
10. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. Inverse Problems for Maxwell's Equations. Utrecht: VSP, 1994.

11. Goncharskii A.V., Ovchinnikov S.L., Romanov S.Y. On the one problem of wave diagnostic // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2010. Vol. 34, No. 1. P. 1-7.
12. Lavarello R.J., Oelze M.L. Tomographic reconstruction of three-dimensional volumes using the distorted born iterative method // IEEE Trans. Med. Imaging. 2009. Vol. 28. P. 1643–1653.
13. Goncharskii A.V., Romanov S.Y. Two approaches to the solution of coefficient inverse problems for wave equations // Comput. Math. Math. Phys. 2012. Vol. 52. P. 245–251.
14. Natterer F. Numerical Solution of Bilinear Inverse Problems // Preprints "Angewandte mathematik und informatik" Munster. 1996. No. 19/96-N.
15. Beilina L., Klivanov M.V., Kokurin M.Y. Adaptivity with relaxation for ill-posed problems and global convergence for a coefficient inverse problem // J. Math. Sci. 2010. Vol. 167. P. 279–325.
16. Berliner M.J., Lindberg J.F. Acoustic Particle Velocity Sensors: Design, Performance, and Applications // American Institute of Physics. 1996. Vol. 368.
17. Shipps J.C., Deng K. A miniature vector sensor for line array applications // OCEANS 2003. Proceedings. 2003. Vol. 5. P. 2367-2370.
18. Natterer F., Sielschott H., Dorn O., Dierkes T., Palamodov V. Fréchet Derivatives for Some Bilinear Inverse Problems // SIAM J. Appl. Math. 2002. Vol. 62, No. 6. P. 2092–2113.
19. Natterer F. Sonic Imaging // In: Handbook of Mathematical Methods in Imaging. New York: Springer-Verlag. 2015. P. 1253–1278.
20. Beilina L., Klivanov M.V. Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems. New York, Springer. 2012. 407 p.
21. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. and Seryozhnikov S.Y. Cuperkomp'yuternye tekhnologii v zadachakh proektirovaniya tomograficheskikh diagnosticheskikh kompleksov [Supercomputer technologies in problems of tomographic diagnostic systems design]. St. Petersburg, Publishing of Polytechnic University, 2016. 230 p.
22. Agayan G.M., Voevodin Vad.V., Rovnov S.Yu. O primenimosti posloynnykh modeley v reshenii trekhmernykh zadach ul'trazvukovoy tomografii [Applicability of stratified models for solving problems of three-dimensional ultrasonic tomography] // Vychisl. Metody Programm. 2013. Vol. 14, No. 1. P. 533-554.
23. Goncharsky A.V., Romanov S.Y. and Seryozhnikov S.Y. A computer simulation study of soft tissue characterization using low-frequency ultrasonic tomography // Ultrasonics. 2016. Vol. 67. P. 136–150.
24. Hendee W.R., Ritenour E.R. Medical Imaging Physics. New York: Wiley, 2002.
25. Yuen D.A., Wang L., Chi X., Johnsson L., Ge W., Shi Y., editors. GPU Solutions to Multi-scale Problems in Science and Engineering. Lecture Notes in Earth System Sciences. Berlin Heidelberg: Springer. 2013.
26. Li C., Sandhu G.S., Roy O., Duric N., Allada V., Schmidt S. Toward a practical ultrasound waveform tomography algorithm for improving breast imaging // Proc. SPIE 9040, Medical Imaging 2014: Ultrasonic Imaging and Tomography, 90401P.
27. Schmidt S., Gade-Nielsen N. F., Høstergaard M., Dammann B., Kazantsev I. G., High Resolution Orientation Distribution Function // Materials Science Forum. 2012. Vols. 702-703. P. 536-539.
28. Birk M., Dapp R., Ruiter N.V., Becker J. GPU-based iterative transmission reconstruction in 3D ultrasound computer tomography // J. Parallel Distrib. Comput. 2014. Vol.74. P. 1730–1743.
29. Goncharsky A.V., Romanov S.Y., Seryozhnikov S.Y. Inverse problems of 3D ultrasonic tomography with complete and incomplete range data // Wave Motion. 2014. Vol. 51, No. 3. P. 389-404.

30. Natterer F. Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging // In: Contemporary Mathematics. 2011. Vol. 559. Providence: American Mathematical Society. P. 151–162.
31. Romanov S.: Research of tomographic schemes of low-frequency ultrasonic diagnostics on supercomputers . Proc. of the 1st Russian Conference on Supercomputing (RuSCDays 2015), Moscow, Russia, September 28-29, 2015, CEUR-WS.org, online CEUR-WS.org/Vol-1482/199.pdf44.
32. Goncharskii A.V., Romanov S.Yu, Seryozhnikov S.Yu Low-Frequency Three-Dimensional Ultrasonic Tomography // Doklady Physics. 2016. Vol. 61, No. 5. P. 211-214.