Сравнительный анализ методов решения задачи оптимального управления водными биологическими ресурсами*

Н.А. Шилова, О.А. Юфрякова

Северный (Арктический) Федеральный университет имени М.В. Ломоносова

Развитие методов параллельного программирования внесло значительный вклад в решение задач глобальной оптимизации, которые требуют значительных затрат объемов вычислительных ресурсов. Задачи финансовой математики и проектирования, оценка экологического ущерба при антропогенном воздействии и компьютерная анимация, а также многие другие наукоемкие задачи используют преимущество вычислительных кластеров для получения решения.

Цель настоящего исследования заключается в определении эффективного метода для решения задачи оптимального управления водными биологическими ресурсами, где в качестве параметра управления взят допустимый объем изъятия [1]:

$$J\left(x^0, s^0, [v]_0^{q-1}\right) = \sum_{i=0}^{q-1}\left(\rho x^i - \beta v^i x^i\right)\Delta t + kx^q \to \sup \tag{1}$$

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i + \mu^i \varphi(s^i) x^i (1 - x^i / x_m)\Delta t - v^i x^i \Delta t, \quad i = \overline{0, q-1} \\ s^{i+1} = s^i + D(s_n - s^i)\Delta t - \mu^i \varphi(s^i) x^i \eta^{-1} \Delta t, \quad i = \overline{0, q-1} \end{cases} \tag{2}$$

где x^i, s^i – биомасса водорослей и концентрация биогенных веществ в среде соответственно, μ^i – максимальная удельная скорость роста биомассы водорослей, $\varphi(s^i) = s^i / (K_S + s^i)$ – трофическая функция Моно, D – коэффициент протока, s_n – концентрация биогенных веществ в среде до начала периода вегетации, η - коэффициент, отражающий прирост биомассы водорослей на единицу потребленных биогенных веществ, $x_{\max}$ – максимально возможное значение биомассы водорослей, ρ – стоимости продаваемого сырья из ламинарии сахаристой, β – стоимость технологии добычи водорослей, k – стоимость биомассы водоросли в конечный момент времени.

Для фазовых траекторий задачи (1)-(4) введём множества допустимости:

$$\begin{cases} x^i \in X_i \subset R^n, \quad i = \overline{0, q} \\ s^i \in S_i \subset R^n, \quad i = \overline{0, q} \end{cases} \tag{3}$$

$$[v]_0^{q-1} = \left(v^0, v^1, \ldots, v^{q-1}\right) \tag{4}$$

где $V^0(x, s)$- множество допустимых управлений, D^0- множество допустимых процессов, D^i- множество компонент допустимых процессов и подмножеств $G_i^1 \subset X_i$, $G_i^2 \subset S_i$ - множеств достижимости на i-том шаге $i = \overline{0, q}$.

Для решения поставленной задачи (1) – (4) необходимо выбрать математический метод, программная реализация которого обеспечила бы результат с наименьшими вычислительными затратами.

В настоящее время наиболее распространенным методом для решения задач оптимизации остается метод градиентного спуска, модифицированный в метод быстрого автоматического дифференцирования [2]. Наряду с методом градиентного спуска широко применяются методы покоординатного и наискорейшего спуска. Стоит отметить, что эти методы приспособлены к случаю, когда наименьшее значение функции достигается внутри рассматриваемой области, и становятся малоэффективными, если наименьшее значение достигается на границе или вблизи нее. Для решения таких задач приходится разрабатывать специальные методы. Кроме этого, указанные методы также требуют дополнительных исследований, в случае если функция явля-

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-98800)

ется многоэкстремальной, что усложняет процесс решения необходимостью проведения ряда дополнительных вычислительных экспериментов.

Другой класс методов основывается на идее динамического программирования, предложенной Ричардом Эрнстом Беллманом. В основе этого метода лежит глобальный принцип, который обуславливает как эффективность алгоритмов численной реализации, так и универсальность в отношении постановки рассматриваемых задач. Но такой универсальный метод ассоциируются с введенным им в 1961 году термином «проклятие размерности» («curse of dimensionality») [3]. Данная проблема связана с экспоненциальным возрастанием количества данных из-за увеличения размерности пространства. Метод Беллмана основан на рекуррентном подходе, узким местом которого, с точки зрения скорости расчетов, является перебор состояний. На каждом этапе отдельно вычисляются значения контролируемых факторов, критерии эффективности при этом суммируется. Схема имеет большую вычислительную емкость в связи с тем, что на каждом этапе необходимо перебирать возможные значения состояний системы. Количество таких состояний зависит от числа параметров, формирующих систему, и может достигать миллионов значений. Решение задачи методом Беллмана встречает перед собой проблему резкого роста требования к вычислительным мощностям при увеличении количества параметров задачи. В связи с этим, указанным методом при его последовательной реализации можно решать задачи небольшого масштаба. Значительным преимуществом метода Беллмана является то, что в схеме присутствуют большие витки цикла с независимостью по данным. Это позволяет реализовать схему Беллмана, применяя не только последовательные, но и параллельные алгоритмы.

Таким образом, наиболее универсальным методом для решения задачи оптимального управления является метод Беллмана. Благодаря высокой производительности современных суперкомпьютеров и параллельным стандартам, таким как, MPI и OpenMP, решение задач динамического программирования, возможно, ускорить в сотни и даже тысячи раз. Для решения задачи (1) – (4) применялись два метода: метод градиентного спуска и схема Беллмана, которые реализованы с применением последовательных вычислений. Результаты численного эксперимента, реализованного в среде Borland Delphi 7.0, показали, что метод Беллмана позволяет получить более точное решение.

Результатом дальнейшей работы станет разработка математического и программного обеспечения для решения задачи оптимального управления водными биологическими ресурсами с применением параллельных вычислений и методов оптимизации. Для практического использования результатов исследования требуется усложнение задачи (1)-(4), которое обуславливается включением в систему (2) возрастной структуры и функций, описывающих межвидовую конкуренцию. Модифицированная задача (1)-(4) будет иметь большую вычислительную сложность и для ее реализации потребуется использование суперкомпьютерных технологий с распараллеливанием вычислительной схемы. Расчеты для задач такой сложности будут проводиться на вычислительном кластере САФУ компании Fujitsu (суммарной пиковой производительностью 20 TFLOPS). Программный код будет написан на C++ с использованием технологий OpenMP и MPI. Полученные результаты могут быть использованы как в образовательном процессе, так и для моделирования сложных экологических систем.

Литература

1. Андреева Е.А., Шилова Н.А., Математическое моделирование и оптимальная стратегия в использовании и сохранении ресурсов популяции // Математические методы управления, Тверь: ТвГУ, 2010. – с.20 – 30.

2. Yu. Evtushenko, E. Zasuhina, V. Zubov. The application of FADmethodology for computing second order derivatives. Abstracts of Third International Conferenc on Automatic Differentiation: «From Simulation to Optimization», June 19-23, 2000, Maison du Seminaire, Nice, France. Published by INRIA, Sophia Antipolis, France, P. 23.

3. Беллман. Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во Иностранная литература, 1960 г.