Параллельные вычисления в исследованиях порождающих группу множеств инволюций*

А.И. Макосий[1], А. В. Тимофеенко[2]

Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова[1],
Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева[2]

Введение

Не обращаясь пока к формулировке теоретико-групповой задачи, изучаемой в работе, скажем несколько слов о вычислительной схеме её решения. Имеется упорядоченное множество C элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Фиксируется первый элемент множества и далее необходимо обратиться к каждой тройке

$$(c_1, c_j, c_k), 1 < j < k \leq n \tag{1}$$

и проверить некоторые свойства данной тройки в исследуемой группе. Поскольку число n может быть очень большим и представление в памяти ЭВМ элементов из C требует много места, то множество C разбивается на m подмножеств, где m — число вычислительных узлов. На каждом из узлов решение теоретико-групповой задачи для тройки (1) осуществлено системой компьютерной алгебры. Главный узел проверяет одинаковость полученных на других узлах результатов и формирует итог вычислений.

Целью работы является нахождение троек порождающих группу инволюций, две из которых перестановочны. Для максимально возможного множества конечных простых групп требуется выяснить каковы все её $(2\times 2, 2)$-тройки инволюций с точностью до сопряжённости и равенства пар порядков произведений неперестановочных инволюций. Инструментом исследования являются вычисления с использованием систем компьютерной алгебры.

1. Основной результат

Напомним, что если элемент a группы отличен от её единицы 1, но равен единице его квадрат $a^2 = a \cdot a = 1$, то a называется *инволюцией.* За исключением группы $PSU_3(9)$ три инволюции порождают каждую (известную) конечную простую нециклическую группу. Напомним, каждую конечную группу можно собрать из простых групп подобно тому, как натуральные числа строятся из простых посредством умножения, [1]. Поэтому при исследовании группы на порождаемость тройками инволюций на инволюции i, j, k группы накладывают дополнительные ограничения. В данной задаче это перестановочность первых двух инволюций $ij = jk$.

Тройка инволюций (i_1, i_2, i_3) группы G, порождающая эту группу и удовлетворяющая условию $i_1 i_2 = i_2 i_1$, называется её $(2 \times 2, 2)$-*тройкой инволюций.* А саму группу называют $(2 \times 2, 2)$-*порождённой*, [2]. Каждую $(2 \times 2, 2)$-тройку инволюций характеризует пятёрка (m, n, C_1, C_2, C_3), где m, n — порядки произведений неперестановочных инволюций $i_1 i_3$, $i_2 i_3$ и $m \leq n$, а C_k — имя класса сопряженных инволюций, содержащего инволюцию i_k, $k = 1, 2, 3$ (эти имена обычно записывают как $2A, 2B, \ldots$). Мы не различаем $(2 \times 2, 2)$-тройки инволюций, имеющие одинаковые пятёрки указанного вида. Полтора десятка лет назад было выяснено какие (известные) конечные простые группы являются $(2 \times 2, 2)$-порождёнными [2,3] и для каких любые три инволюции, две из которых перестановочны, порождают собственную подгруппу. За исключением самой большой спорадической группы

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта №16-41-240670.

F_1 для всех конечных простых спорадических групп, где такие тройки существуют авторами доклада указана хотя бы одна $(2 \times 2, 2)$-тройка инволюций. Что касается вопроса построения всех $(2 \times 2, 2)$-троек инволюций группы, то полученные к сегодняшнему дню результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Если G — знакопеременная группа A_k степени $k \leq 16$ или спорадическая группа Матье, Янко J_1, J_2, J_3, Хигмана-Симпса HS, Сузуки Suz, Рудвалиса Ru, или Маклафлина McL, то расположенные в Атласе [4] пустые множества или множества пятёрок вида (m, n, C_1, C_2, C_3) и только они соответствуют $(2 \times 2, 2)$-тройкам инволюций группы G.

2. Организация вычислений

Несмотря на известные возможности в области параллельных вычислений системы компьютерной алгебры GAP [5,6], при нахождении $(2 \times 2, 2)$-троек инволюций группы возникли и непреодолимые трудности применения готовых программных продуктов. Например, применение пакета ParGAP приводит: к неприемлемому увеличению используемой оперативной памяти, невозможности сохранения рабочего пространства при прерывании вычислений и его восстановления при их продолжении, а также к выявлению других технических недоработок.

Поэтому основным алгоритмическим и вычислительным подходом к решению задачи указания полного множества $(2 \times 2, 2)$-троек инволюций было использование инструментария MPI и переборный подход. Для исследуемой группы G строятся классы её сопряженных инволюций или их подмножество с возможностью продолжения построения. Далее перебираются все тройки инволюций, и сохраняются те из них, которые порождают исследуемую группу и обладают нужным свойством. Доказывается, что в таких тройках можно зафиксировать первый элемент. Полученные $(2 \times 2, 2)$-тройки инволюций позволяют получить дополнительные тройки без вычислений. Вычисления организуются по схеме «master-slave». Главный узел передает подчиненным номера инволюций для вычислений и получает признак успешности проверки на $(2 \times 2, 2)$-порождаемость. Таким образом, распараллеливание производилось по верхнему циклу перебора. Практика показала неэффективность подхода с распараллеливанием по внутреннему циклу.

3. Результаты вычислений

Результаты вычислений размещены в виде «Электронного атласа $(2 \times 2, 2)$-троек инволюций конечных неабелевых простых групп», [4]. В атласе представлена информация об алгоритмах, ссылки на печатные работы с возможностью доступа к их содержанию и программы с расширенными комментариями. Все это в совокупности позволяет получить полный доступ к доказательству теорем. При необходимости можно использовать программный код или какую-либо его часть в собственных исследованиях. Приведены примеры программ, использующих данные о $(2 \times 2, 2)$-тройках инволюций. Также размещена дополнительная информация о группах, связанная с вопросом об их $(2 \times 2, 2)$-порождаемости.

Литература

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.:Наука, 1996. 288 с.

2. Мазуров В. Д., О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Сибирский математический журнал. 2003. № 44:1. С. 193–198.

3. Нужин Я. Н., Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // Математические заметки, 1990. № 51:4. С. 91–95,

4. Макосий А. И., Тимофеенко А. В. Атлас конечных простых $(2 \times 2, 2)$-порожденных групп URL: http://ftp.kspu.ru/moodle/t/index.html (дата обращения: 15.04.2018).

5. Cooperman G. Parallel GAP/MPI (ParGAP/MPI), College of Computer Science, Northeastern University. URL: (accessed: 15.04.2018).

6. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10. URL: (accessed: 15.04.2018).