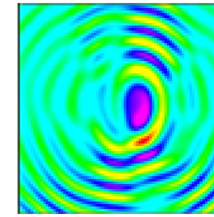
Международная конференция
"Суперкомпьютерные дни в России",
25-26 сентября 2017 г.



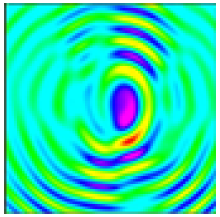
Оптимизация численных алгоритмов решения обратных задач ультразвуковой томографии на суперкомпьютере

д.ф.-м.н. **Романов С.Ю.**
Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, НИВЦ

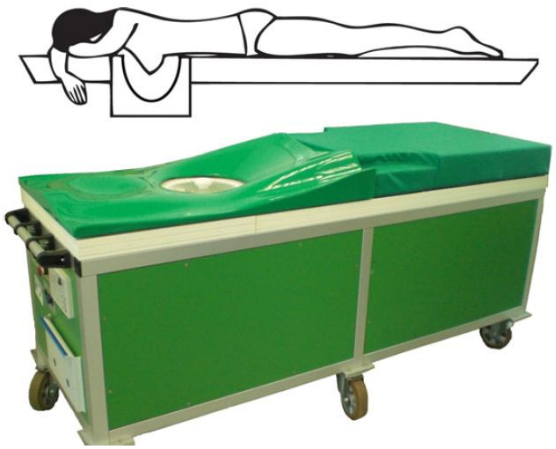
Исследования проведены при поддержке гранта РНФ № 17-11-01065

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, НИВЦ

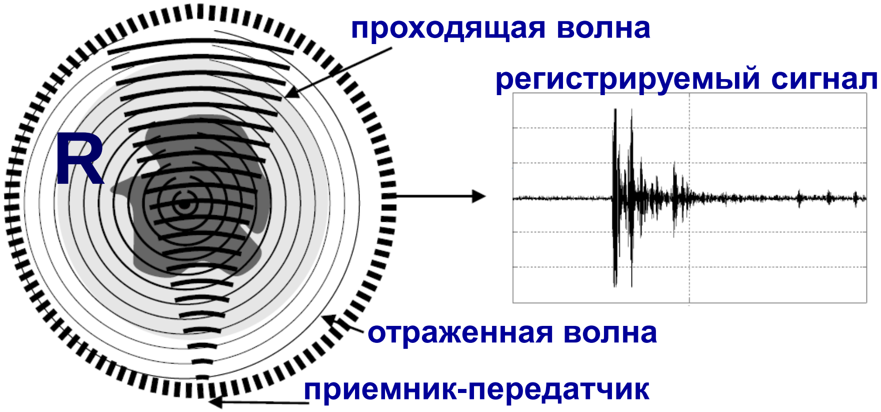
Ультразвуковая томография. Приложение к медицине

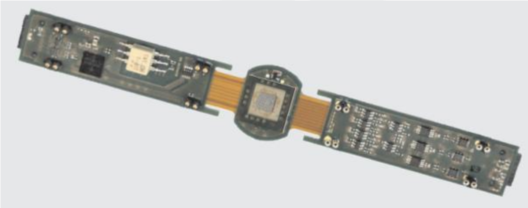


- **Более 40 тысяч женщин** России ежегодно заболевают раком молочной железы. Доля лиц с поздними стадиями заболевания среди первичных больных превышает 40%.
- Ультразвуковые томографы высокого разрешения позволят осуществлять **раннюю диагностику рака**.
- **Каждое 4-е** онкологическое заболевание – рак груди.

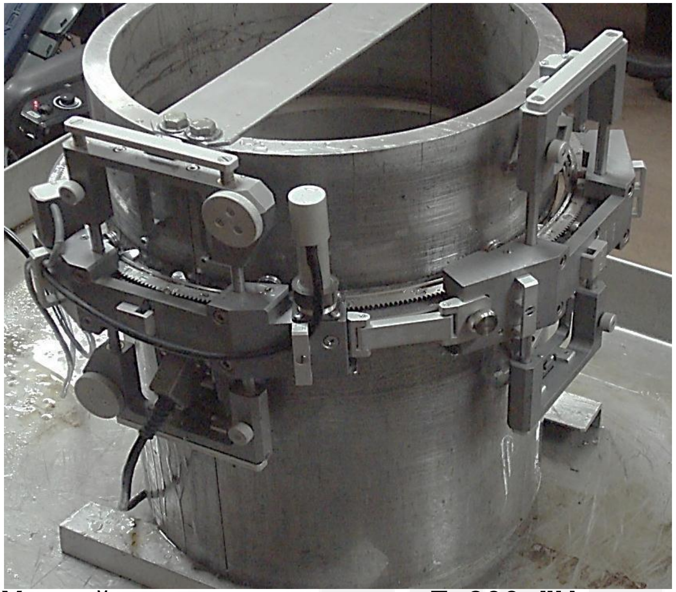


Макет ультразвукового томографа Karlsruhe Institute of Technology (Germany)



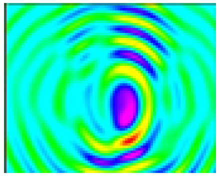


Волновая томография. Приложение к неразрушающему контролю



Устройство сканирования Ду300, "Научно - производственный центр неразрушающего контроля "ЭХО+"

Постановка задачи волновой томографии



Постановка задачи

Волновое уравнение в области $\Theta\times(0,T)=\Pi,\ \ \Psi=\partial\Theta\times(0,T)$

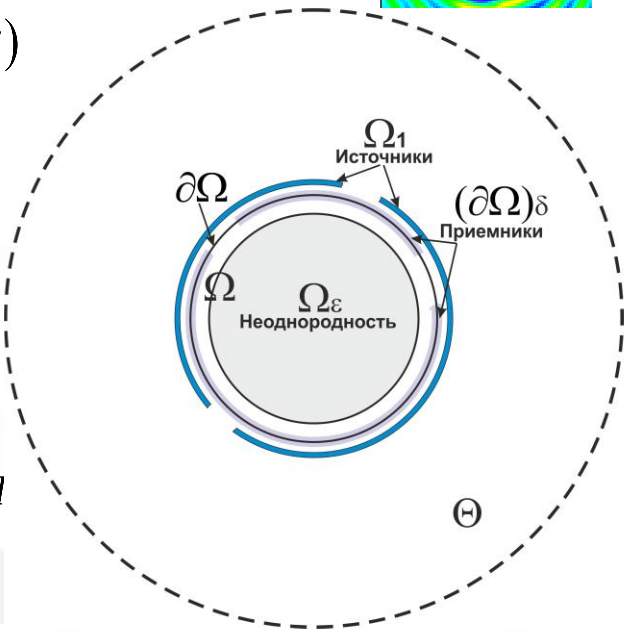
$$c(r)u_{tt}(r,t)-\Delta u(r,t)=f(r,t)$$

$$u(r,t=0)=u_t(r,t=0)=0,$$

если вокруг объекта известная однородная среда, то можно границу отодвинуть далеко и ставить нулевое условие Неймана: $\partial_n u(r,t)|_{\Psi}=0,$

где $c(r)\equiv c_0=const,$ при $r \quad \Omega_{\varepsilon},$ **c_0 - известны.**

$u(r,t)=U(r,t)$ **- известна в** $\Gamma_{\delta}=(\partial\Omega)_{\delta}\times(0,T),$



Минимизация невязки: $\Phi(u(c))=\sum\limits_{j=1}^{M}\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\partial R}E^2(s,t)d$

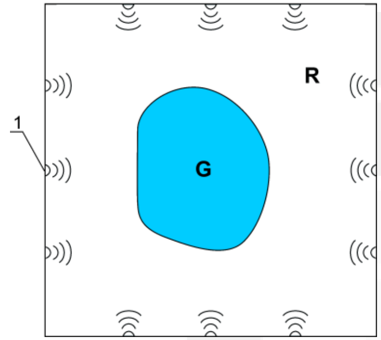
$$E(s,t)=\begin{cases}u(s,t)-U(s,t), \text{ для таких } s\in\partial R, \text{ где } U(s,t) \text{ - измерена}\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

Сопряженная задача: $c(r)w_{tt}(r,t)-\Delta w(r,t)=E(r,t)|_{r\in\partial R}\quad w(r,t=T)=w_t(r,t=T)=0,\ \ \partial_n w(r,t)|_{\partial\Omega}=0$

В новой постановке эксперим. данные могут отсутствовать на части границы

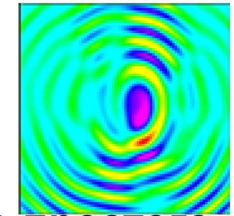
Можно выписать производную Фреше:

$$\Phi'(u(c),dc)=\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\Omega}\left\{\left[\int\limits_{0}^{T}w_t^j(r,t)u_t^j(r,t)dt\right]dc(r)\right\}dr$$



Можно уменьшить область расчетов, поставив на внутр.границе приближенные условия неотражения 2-ого порядка : $u_{xt}-\frac{1}{v}u_{tt}+\frac{v}{2}u_{yy}=0$

Некоторые проблемы разностных схем



- Явная разностная схема 2-го порядка большой потенциал сравнительно простого распараллеливания.
- Обратные некорректно поставленные задачи томографии очень чувствительны к погрешности вычислений --> очень большие расчетные сетки.
- Более того, увеличение частоты зондирования, 3D задачи (объем вычислений O(n^4)) --> проблемы накопления ошибки, объемы требуемой памяти (особенно на GPU максимум n=500 точек), объемы вычислений.

Выход: использование аппроксимаций более высоких порядков.

На рисунке размер 200×200 мм, 350×350 точек сетки, на длину волны импульса 7 мм приходится ~12 точек.
Таким образом, схемы 4-го порядка позволяют уменьшим размер сетки расчетов в 1.5-2 по каждой координате.

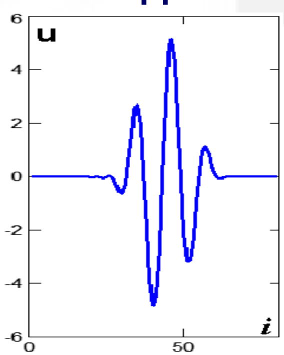


Рис. График зондирующего импульса

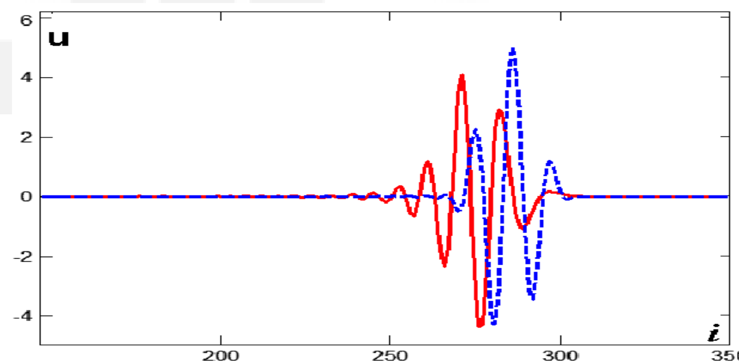
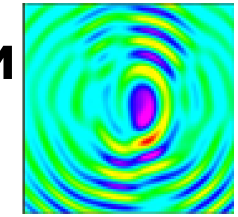


Рис. Сечения импульса в момент t_1 в однородной среде для разностной схемы 2-го (сплошная) и 4-го (пунктир) порядков

Разностные схемы 4-го и выше порядка точности для волнового уравнения



$$u_{ij}^{k+1}+u_{ij}^{k-1}=\lambda^2 a\left(u_{ij+1}^k+u_{ij-1}^k+u_{i+1j}^k+u_{i-1j}^k\right)$$
$$+\lambda^2 b\left(u_{i+1j+1}^k+u_{i+1j-1}^k+u_{i-1j+1}^k+u_{i-1j-1}^k\right)$$
$$+\lambda^2 c\left(u_{i+2j}^k+u_{i-2j}^k+u_{ij+2}^k+u_{ij-2}^k\right)$$
$$+\lambda^2 d\left(u_{i+2j+1}^k+u_{i+2j-1}^k+u_{i-2j+1}^k+u_{i-2j-1}^k+u_{i+1j+2}^k+u_{i+1j-2}^k+u_{i-1j+2}^k+u_{i-1j-2}^k\right)$$
$$+\lambda^2 e\left(u_{i+2j+2}^k+u_{i+2j-2}^k+u_{i-2j+2}^k+u_{i-2j-2}^k\right)$$
$$+\lambda^2 f u_{ij}^k$$

где из условия устойчивости Куранта

$$\lambda=-v\tau/h$$

Для того, чтобы эта схема имела 4-ый порядок и аппроксимировала волновое уравнение

$$a=14d+32e+4/3$$
$$b=-8d-16e$$
$$c=-2d-2e-1/12$$
$$f=2/\lambda^2-24d-60e-5$$

Условие,что схема не зависит от направления с 6-ым порядком точности дополнительно дает соотношение

$$d/2+2e=-1/60$$

для простоты полагалось d=0, откуда e= -1/120

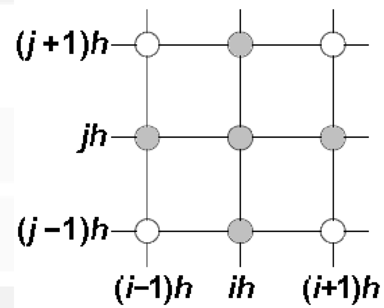


Рис. Шаблон разностной схемы 2-го порядка точности

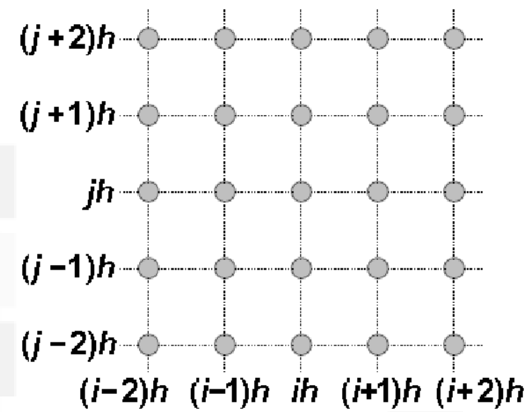
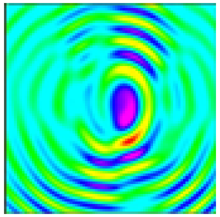


Рис. Шаблон разностной схемы 4-го порядка точности

Выбор значений параметров d=0, e=0 снижает точность схемы, но в 2-3 раза уменьшает вычисления, исключая диагональные элементы из расчетов

Модельные расчеты для разностных схем 2-го и 4-го порядка точности



Сначала решалась прямая задача распространения ультразвукового импульса 4-го порядка точности, и сохранялись экспериментальные данные *U*(*s*,*t*) на границе.
Затем решались обратные задачи со 2-ым и 4-ым порядками точности.

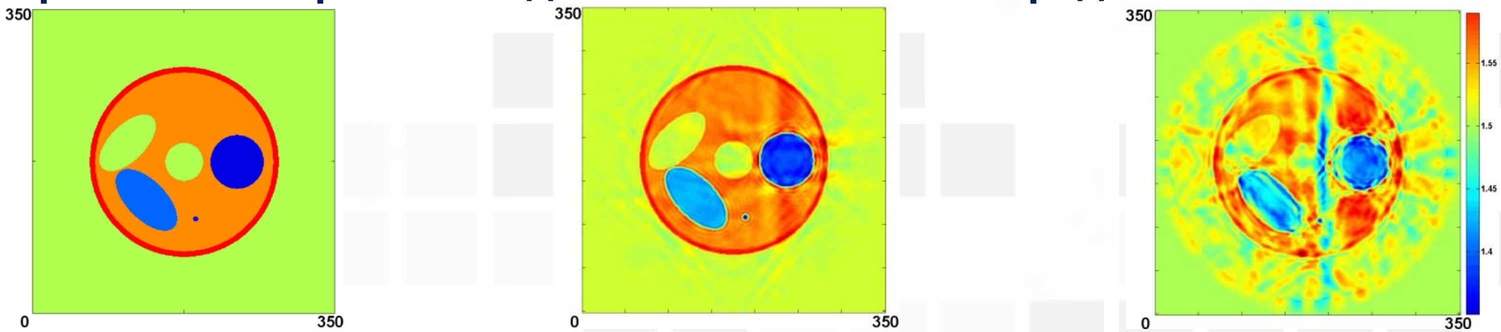
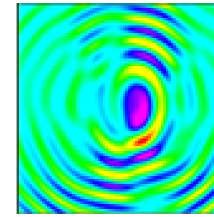


Рис. (слева) - модельное изображение, (центр)- восстановленное изображение с помощью схемы 4-го порядка, (справа)- восстановленное изображение с помощью схемы 2-го порядка

Использование разностных схем 4-го порядка точности позволяет при сохранении точности вычислений в 1.5-2 раза уменьшить размер n расчетной сетки по каждой координате.

Конечно, увеличение порядка точности разностной схемы приводит к увеличению в 2-3 раза количества операций для расчета одной точки в 2D и до 4-5 раз в 3D, а также примерно в 2 раза увеличивается обмен данными при распараллеливании алгоритма на CPU процессорах. Однако суммарный выигрыш по времени составляет около 3 раз.

Нелинейность обратной задачи волновой томографии



В силу нелинейности обратных задач волновой томографии сходимость итерационного процесса зависит от начального приближения.

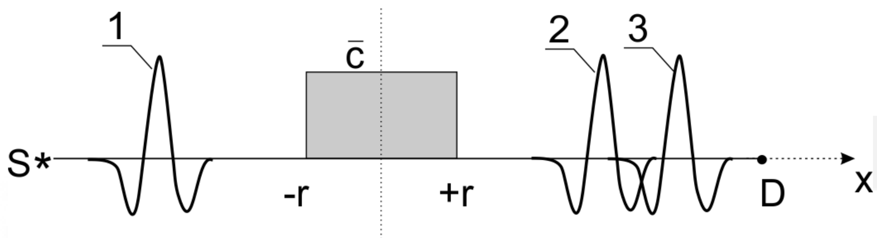


Схема расположения зондирующих импульсов при наличии и отсутствии неоднородности

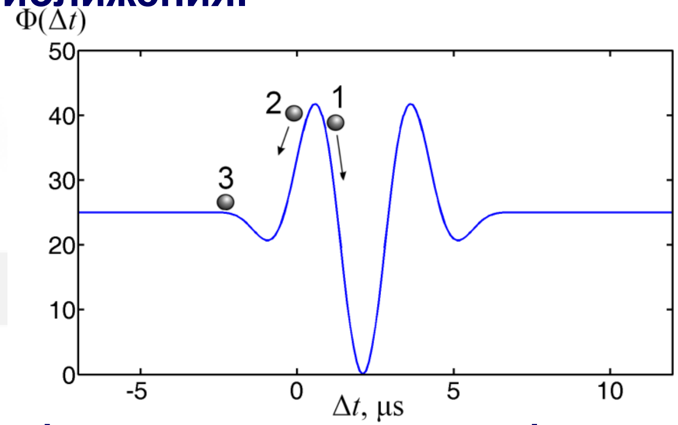


График функционала невязки как функция от задержки для одномерной задачи

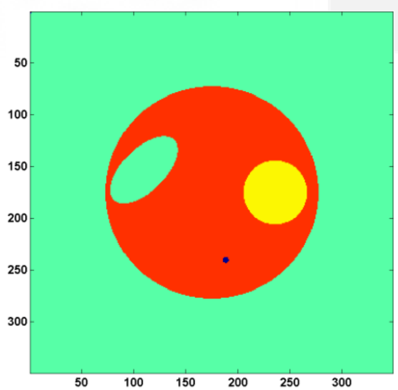


Рис. 1. Модельное изображение – c(r)

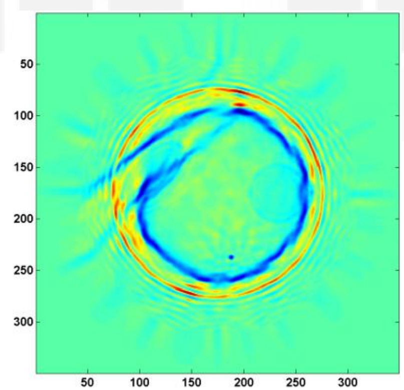
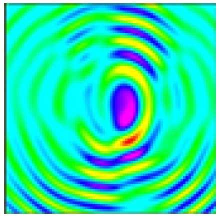


Рис. 2. Скоростной разрез восстановлен в модели (1) с начального приближения c^0(r)=const.

Выбор начального приближения в обратных задачах волновой томографии



Предложен 2-ух этапный алгоритм решения нелинейных обратных задач, в которых в качестве начального приближения используется скоростной разрез, полученный из решения линейной обратной задачи в лучевой модели по времени прихода волны.

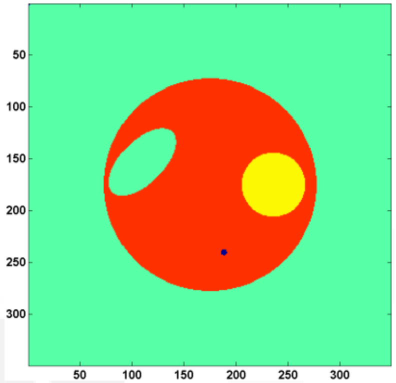


Рис. 1. Модельное изображение c(r)

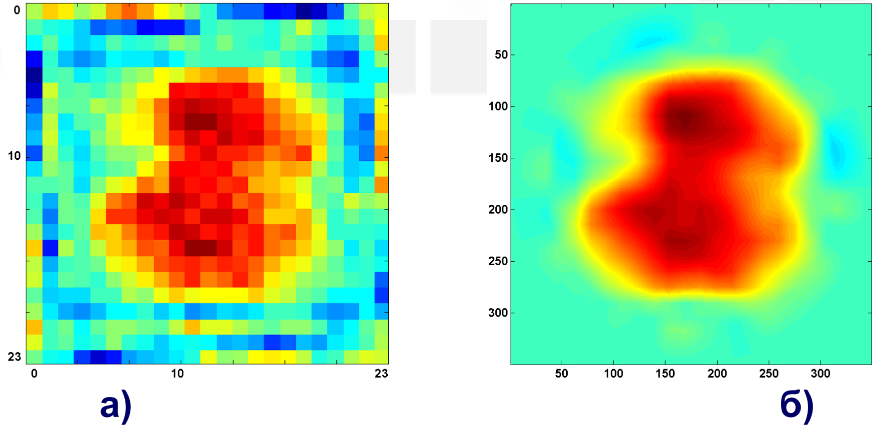


Рис. 2. Восстановленный в лучевой модели скоростной разрез: а) на сетке 23x23 точки, б) после процедуры сглаживания.

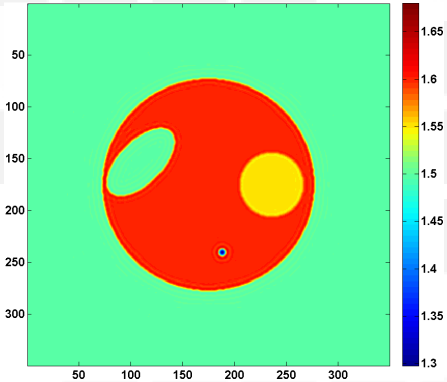


Рис. 6. Скоростной разрез восстановлен в волновой модели с начального приближения, представленного на Рис. 2 б.

Эксперимент по ультразвуковому неразрушающему контролю

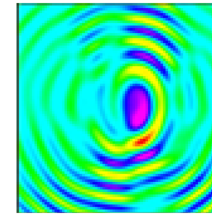


Рис. Вид заготовки из рексолита без отверстия

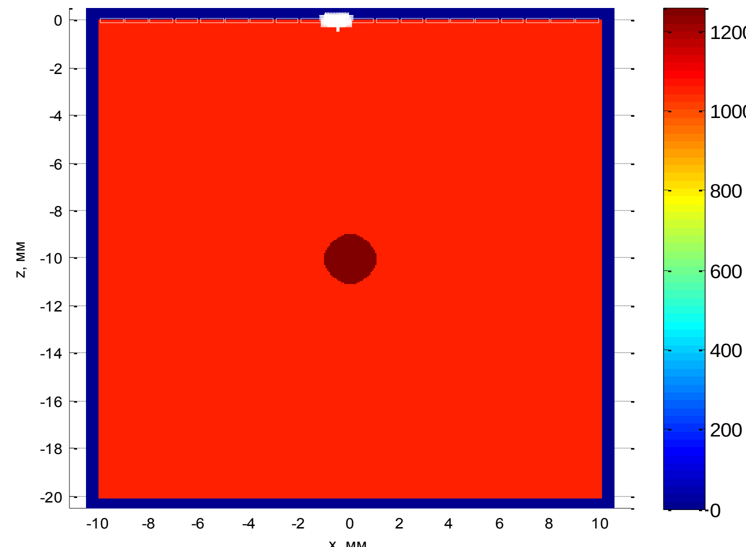


Рис. Схема эксперимента

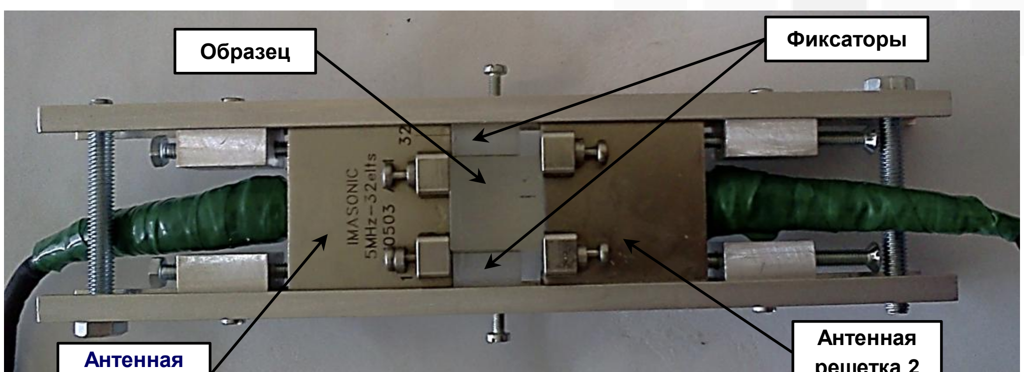
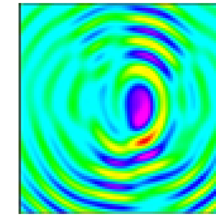


Рис. Стенд для проведения измерений

Размер – 20х20 мм
Размер отверстия – d=2мм
Шаг элементов антенной решетки – 0.6мм
Длина волны – 0.5мм
Число источников – 100
Число приемников для 1 источника – 32
Скорость в рексолите - 2.33 мм/мкс, 100%
Скорость в глицерине – 1.92 мм/мкс, 82%

Реальные экспериментальные данные ультразвукового неразрушающего контроля



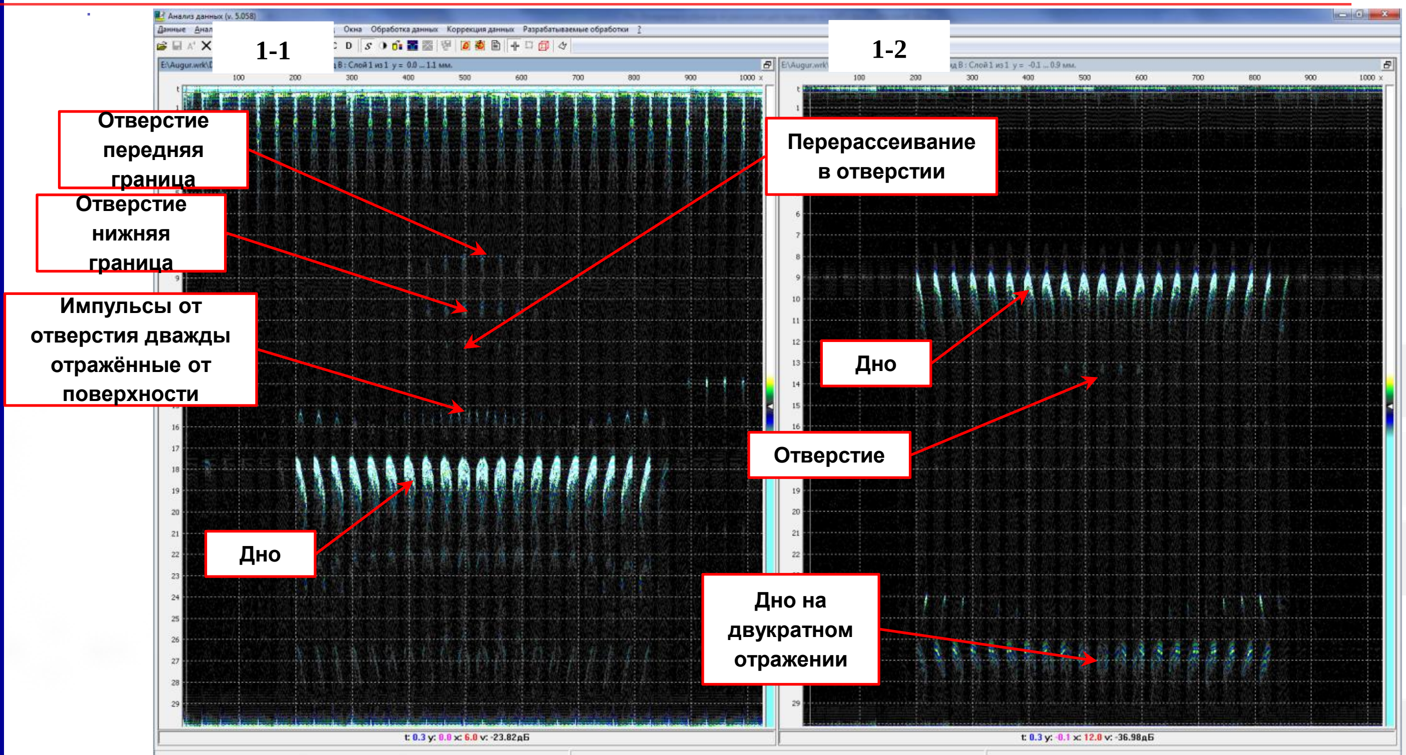


Рис. Реальные экспериментальные данные, полученные в "НПЦ неразрушающего контроля "ЭХО+«. Отверстие заполнено глицерином.

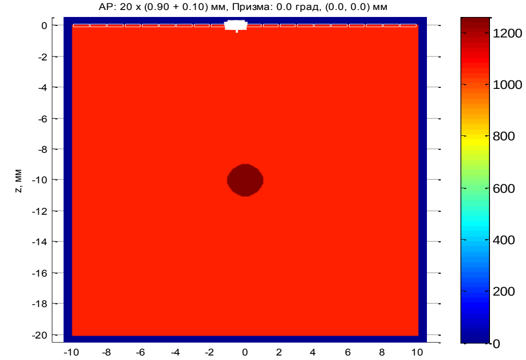
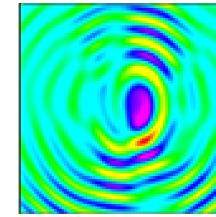
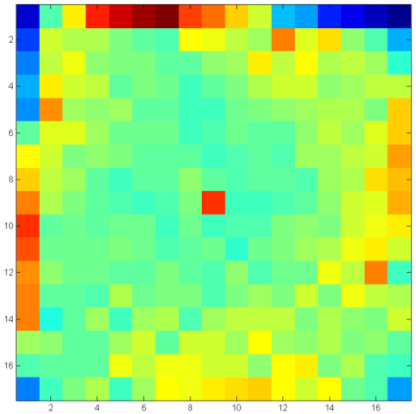


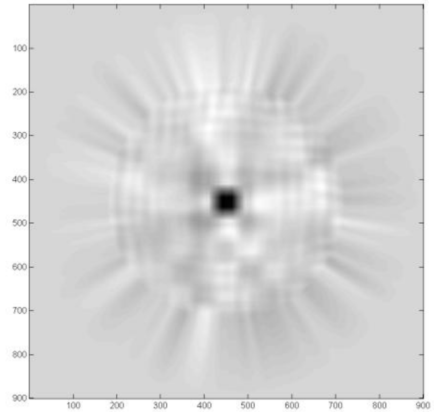
Рис. Схема эксперимента

Выбор начального приближения в обратной задаче ультразвукового неразрушающего контроля на реальных экспериментальных данных





а)



б)

Рис. 2. Восстановленный в лучевой модели скоростной разрез: а) на сетке 17x17 точек, б) после процедуры сглаживания.

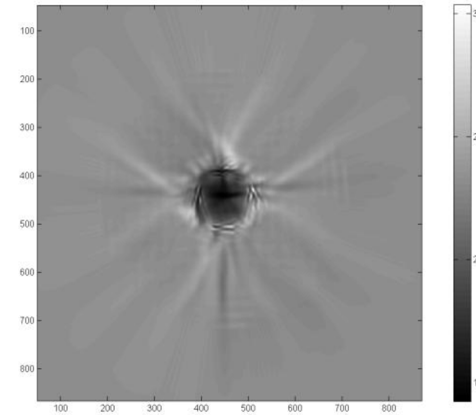


Рис. 6. Скоростной разрез восстановлен в волновой модели с начального приближения, представленного на Рис. 2 б.

- Число источников – 100
- Число приемников для 1 источника – 32
- Сетка расчетов – 900x900 точек
- Время расчета на 100 ядрах CPU «Ломоносов» ~3ч