Russian Supercomputing Days

CMND^{2}S
Center for Micro and Nanoscale Dynamics of Dispersed Systems

Трехмерное моделирование медленных течений вокруг недеформируемых структур с использованием FMM/GPU ускоренного МГЭ

Абрамова Ольга Александровна [*],
Питюк Ю. А. [*], Гумеров Н. А. [*,**], Ахатов И.Ш. [*,***]

* Центр Микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем, Башкирский Государственный Университет, Уфа

** Институт for Advanced Computer Studies, University of Maryland, USA

*** Центр Сколтеха по проектированию, производственным технологиям и материалам, Москва

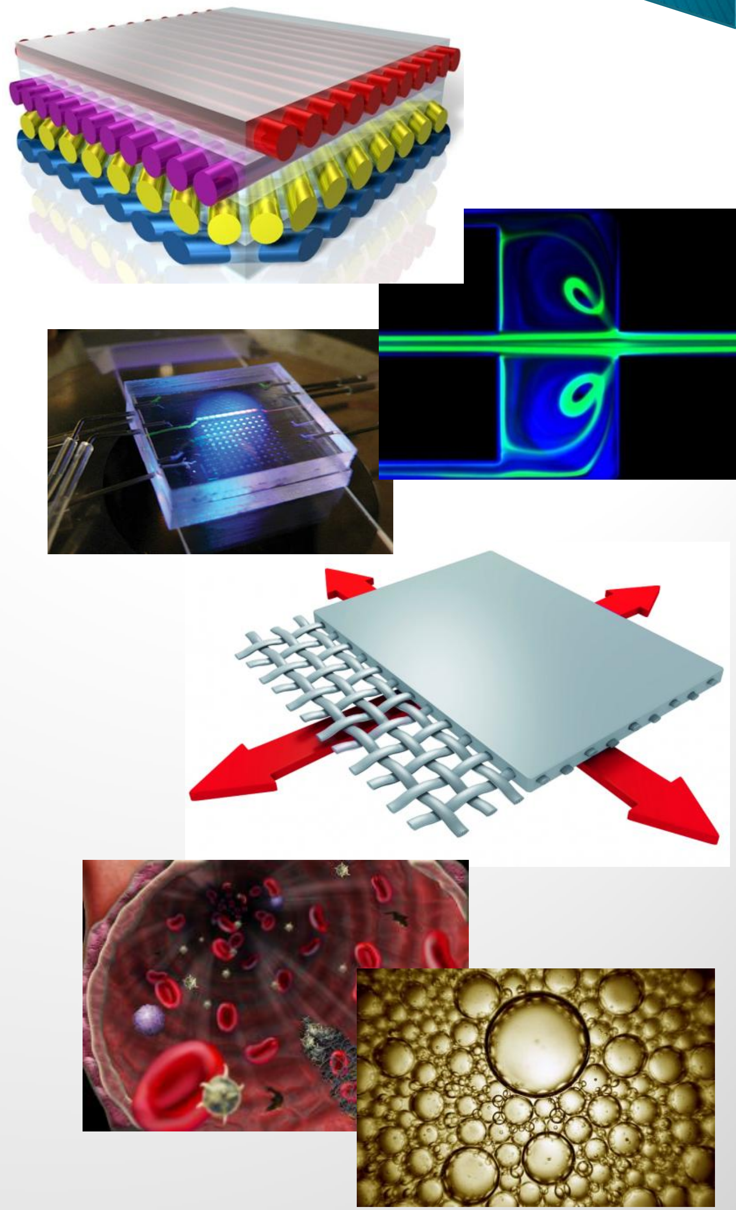
Москва, 2018

Мотивация

- Композиционные материалы играют важнейшую роль в авиастроении, ветряной энергетике, автомобилестроении, ракетно-космической технике для решения задач облегчения конструкций при сохранении прочностных характеристик.

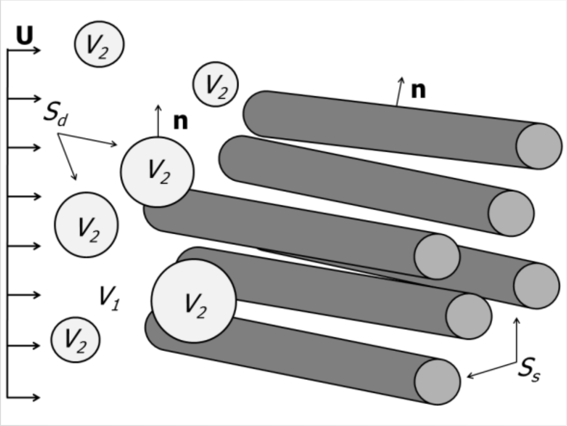
- Исследование стоксовых течений имеет большое значение для микрогидродинамики при создании лабораторий-на-чипе, систем диагностики in vitro в микробикологии, при регулировании микропотоков

- Моделирование динамики большого объема дисперсной среды в сложной геометрии необходимо для более точного описания особенностей картины течения и микроструктуры дисперсной среды при различных параметрах.



Постановка задачи и математическая модель

Цель: разработка и реализация эффективного численного инструмента на основе метода граничных элементов и быстрого метода мультиполей для изучения особенностей трехмерных течений Стокса вокруг недеформируемых неподвижных структур



Рассматривается течение вязкой жидкости и динамика деформируемых капель одной вязкой жидкости в объеме другой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса в неограниченной области

Движение жидкостей описывается уравнениями Стокса

$$-\nabla p_i + \mu_i \nabla^2 \mathbf{u}_i = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1{,}2$$

Граничные условия

на границе раздела жидкостей

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = f\mathbf{n},$$
$$f = 2\gamma k(\mathbf{x}) + (\rho_1 - \rho_2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S_d$$

на боковой поверхности недеформируемых структур

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in S_s$$

Кинематическое условие

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

Применение метода граничных элементов[1] позволяет уменьшить размерность рассматриваемой задачи на единицу, поскольку все расчеты связаны только с границей.

[1] *Pozrikidis C.* Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow, 1992

Метод граничных элементов
Гранично-интегральная формулировка

Граничные интегральные уравнения для жидкости, занимающей объем *V*, ограниченный поверхностью *S*, могут быть записаны в следующем виде*

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\; dS(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} \in V,$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\; dS(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} \in S,$$

$$- \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\; dS(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} \notin S, V,$$

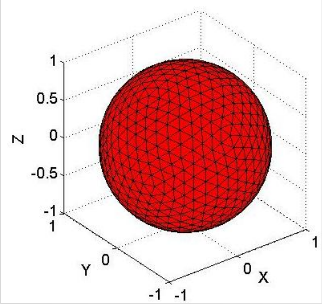
Stokeslet (стокслет)

Stresslet (стресслет)

$$\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{rr}}{r^3}\right), \quad \mathbf{T}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi}\frac{\mathbf{rrr}}{r^5},$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

Задача о течении смеси двух вязких жидкостей в неограниченной области вокруг неподвижных недеформируемых структур



$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{y} \in \mathrm{V}_1, \quad \mathbf{u}(\mathbf{y}) - 2\mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in \mathrm{V}_2, \quad \lambda\mathbf{u}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in \mathrm{S}, \dfrac{1 + \lambda \cdot \beta(\mathbf{y})}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \end{array}\right\} = -\frac{1}{\mu_1}\int_{S_s} \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f_1}(\mathbf{x})\; dS_s(\mathbf{x}) +$$

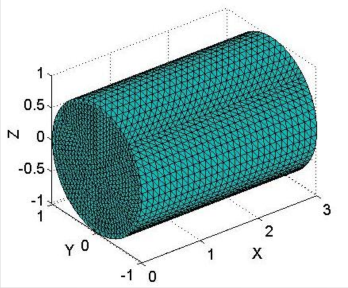
$$+ \int_{S_d} \left\{ -\frac{1}{\mu_1}\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - (1-\lambda)\mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\} \mathrm{d}S_d(\mathbf{x})$$

$$\beta(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{y} \notin S_\mathrm{d} \\ 1, & \mathbf{y} \in S_\mathrm{d} \end{cases}$$

$$S = S_s \cup S_d$$

$$\lambda = \mu_2/\mu_1$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f_1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f_2}(\mathbf{x})$$



Задача об обтекании неподвижных структур вязкой жидкостью

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{y} \in \mathrm{V}_1, \quad \mathbf{u}(\mathbf{y}) - 2\mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y} \in S_s, \dfrac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}_\infty(\mathbf{y}) \end{array}\right\} = -\frac{1}{\mu_1}\int_{S_s} \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f_1}(\mathbf{x})\; dS_s(\mathbf{x})$$

Вычисление сингулярных частей поверхностных интегралов производится на основе известных интегральных тождеств для течений Стокса и метода линейных тестовых решений.

Увеличение размера задачи и ускорение расчетов

Трехмерное моделирование течений вязкой жидкости и жидкости с большим количеством дисперсных включений в областях со сложной геометрией невозможно с применением стандартного МГЭ подхода и требует использования высокопроизводительных вычислений и современных эффективных алгоритмов

- Замена прямого метода решения СЛАУ итерационным (GMRES)

если N – количество неизвестных СЛАУ, то сложность матрично-векторного произведения (МВП) $O(N^2)$, $O(N^3) \rightarrow O(N_{iter}N^2)$, $N_{iter} \ll N$

- Использование в GMRES модуля МВП без хранения матрицы, реализованного на GPU
  Необходимая память $O(N^2) \rightarrow O(N)$ необходимое количество операций $O(N^2)$

- Ускорение матрично-векторного произведения (МВП) в GMRES, используя гетерогенный быстрый метод мультиполей (FMM)

$$O(N^2) \rightarrow O(NlogN) \sim O(N)$$

- Применение гетерогенного иерархического FMM в предобуславливателе flexible версии GMRES

$$N_{iter} \rightarrow min$$

Все это позволяет значительно снизить вычислительную сложность всего алгоритма

$$O(N^3) \rightarrow O(N_{iter}N) \sim O(N)$$

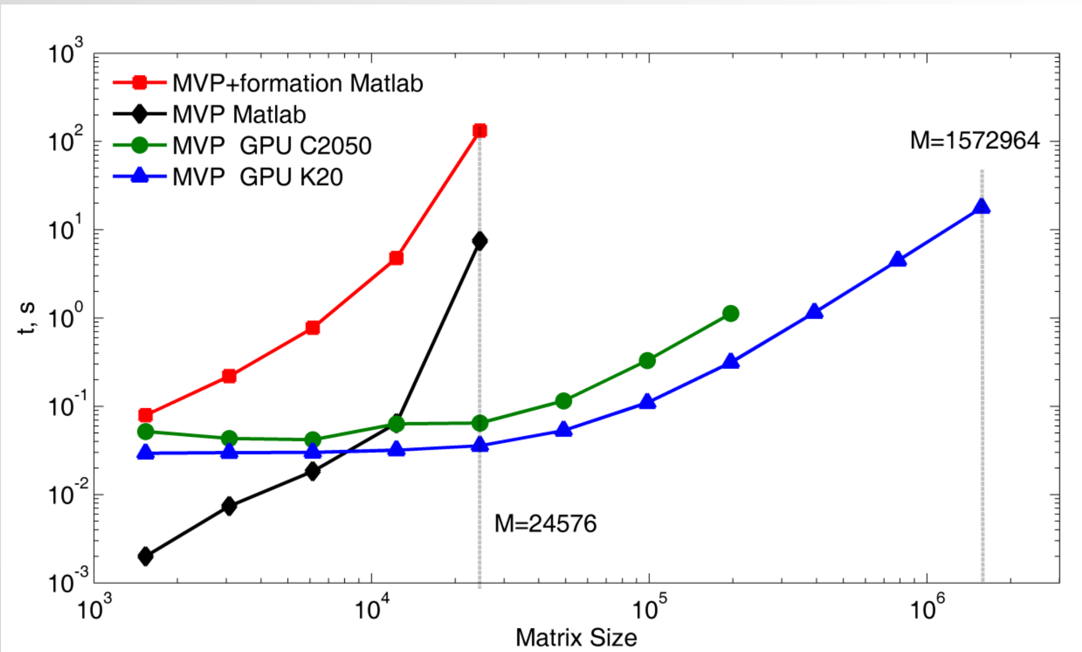
Тестирование модуля МВП на GPU

$$G_{mn}{}^{ij} = S_n \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n) = \frac{1}{8\pi} S_n \left(\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n|} - \frac{(x_m{}^i - x_n{}^i)(x_m{}^j - x_n{}^j)}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n|^3} \right)$$

$n, m = \overline{1, N}, \quad i, j = 1,2,3,$

Размер матрицы $=3\mathrm{N} \times 3\mathrm{N}$

$$K_{mn}{}^{ij} = S_n \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n) = -\frac{3}{4\pi} S_n \frac{(x_m{}^i - x_n{}^i)(x_m{}^j - x_n{}^j)}{|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n|^3} \sum_{k=1}^{3} (x_m{}^k - x_n{}^k) n_n{}^k$$



Сравнение времени вычисления МВП для NVIDIA Tesla K20

M	Matlab	GPU	Ускорение
1024	0.2195	0.082	26.8
2048	0.7748	0.0103	75.2
4096	4.7752	0.0147	324.8
8192	133	0.0236	5635

Возможность решения задач для уравнений Стокса размером до 300000 расчетных узлов на одной рабочей станции

1: 2x Intel Xeon X5660, NVIDIA Tesla C2050
2: 2x Intel Xeon X5660, NVIDIA Tesla K20

Быстрый Метод Мультиполей (FMM)

Стандартное МВП

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \qquad u_j = u(\mathbf{y}_j) = \sum_{i=1}^{N} v_i \mathrm{A}(\mathbf{y}_j, \mathbf{x}_i), \qquad j = 1, \dots, N.$$

Сложность $O(N^2)$

Основная идея FMM*

$$\mathrm{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mathbf{x}) F_n(\mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{p} C_n(\mathbf{x}) F_n(\mathbf{y}) + \varepsilon_p$$

$p \ll N$

p- параметр усечения

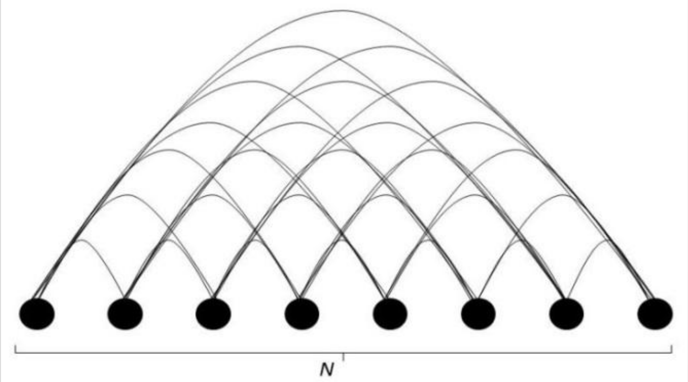
A_{dense}

Произведение плотной матрицы на CPU с использованием OpenMP

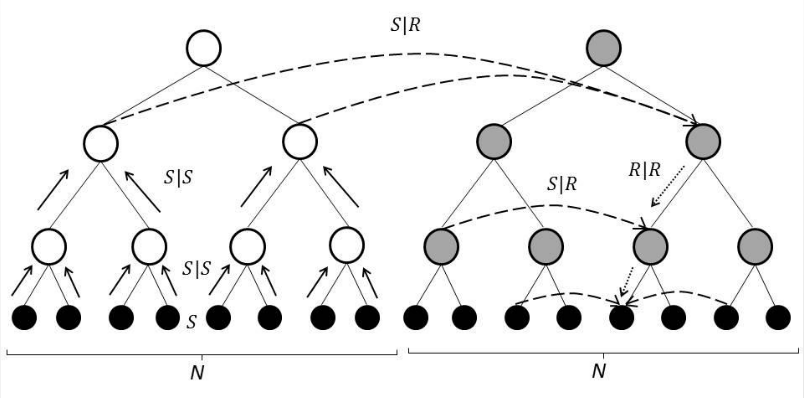
A

A_{sparse}

Произведение разреженной матрицы на GPU с использованием CUDA



Традиционный МГЭ подход $O(N^2)$



FMM МГЭ подход $O(N)$

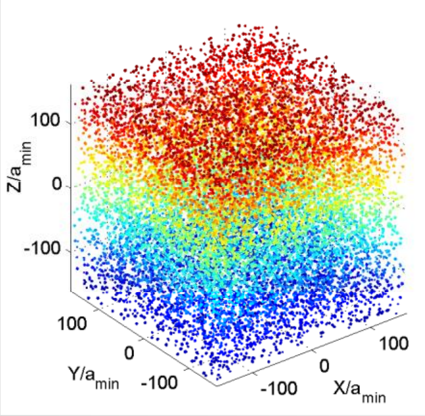
Применяется FMM, предложенный в работах**, где суммирование фундаментальных решений уравнений Стокса сводится к суммированию фундаментальных решений трехмерного уравнения Лапласа

**_Tornberg A.K., Greengard L._ A fast multipole method for the three-dimensional Stokes equations. 2008

** _Wang H et al_ A parallel fast multipole accelerated integral equation scheme for 3D Stokes equations. 2007

*_Gumerov N.A., Duraiswami R._ Fast multipole method for the Helmholtz equation in three dimensions. 2005

Тестирование гетерогенного FMM для уравнений Стокса

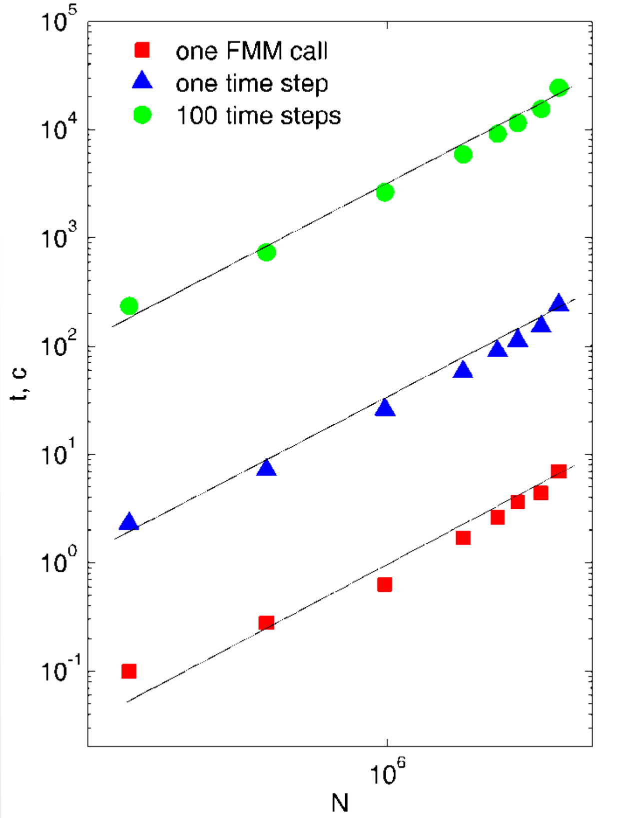


$M=15342$ капель $N\sim170$ Размер задачи $\sim2.5\cdot10^6$ Размер матрицы $\sim7.5\cdot10^6$

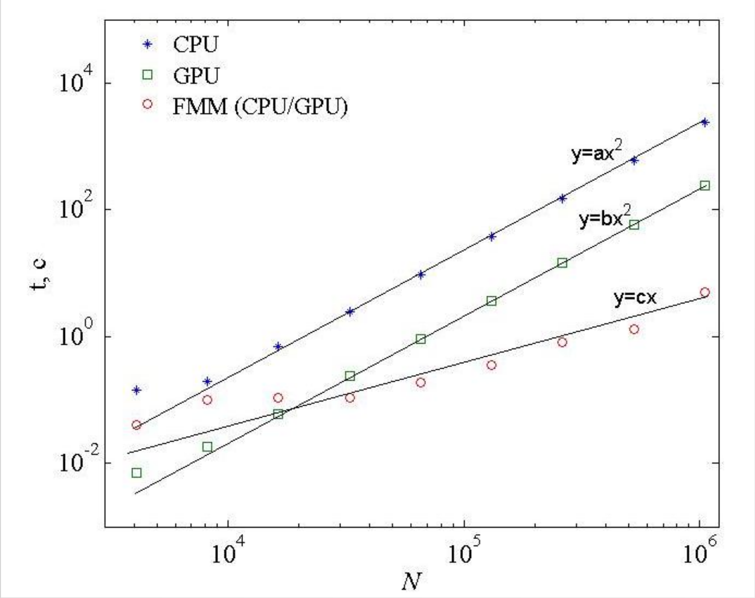
За один временной шаг ~ 11 вызовов FMM
Вычисление геометрических характеристик:
кривизна, нормали, площади

$\lambda = 1.5,\ \ 0.25 \le Ca \le 0.5 \quad \alpha = 8.8\cdot10^{-3}\ p{=}8$

Один вызов FMM ~7 с
Один шаг по времени ~ 4 мин
100 шагов по времени ~7 ч



Время выполнения одного МВП для ядра **G** в зависимости от размера матрицы



$N = 1\,048\,576$

CPU+GPU FMM ~5.1 с

МВП GPU ~ 239 с

Ускорение ~ 46.8

МВП CPU ~ 2379.3 с

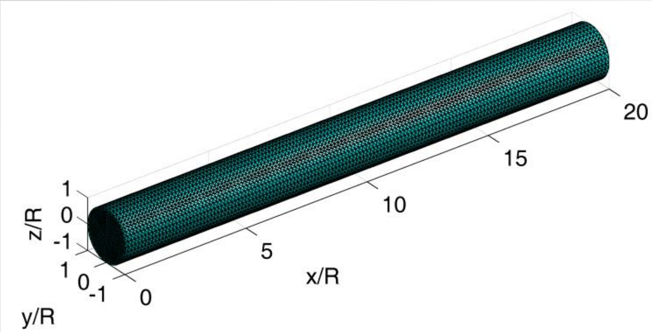
Ускорение ~ 466

Формирование иерархической структуры данных на CPU ~1.39 s

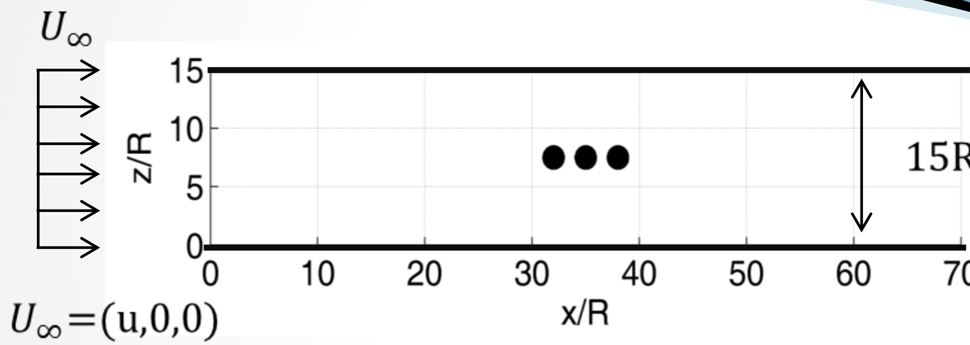
CPU 2x Intel Xeon X5660
GPU NVIDIA Tesla K20

Сложность алгоритма O(N)

Результаты моделирования

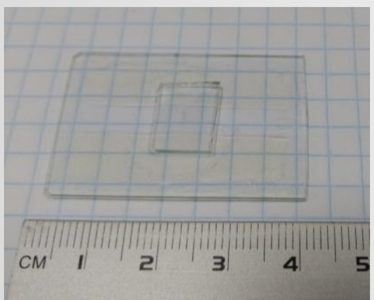


$N_{\Delta filaments} = 13720$



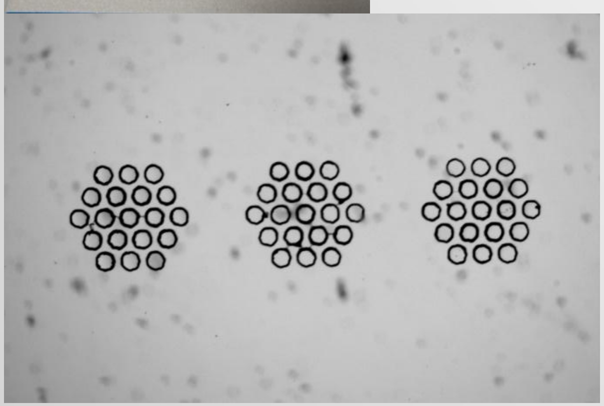
Общее количество расчетных узлов $\mathrm{N}=428360$ $\quad$ $y = 0$

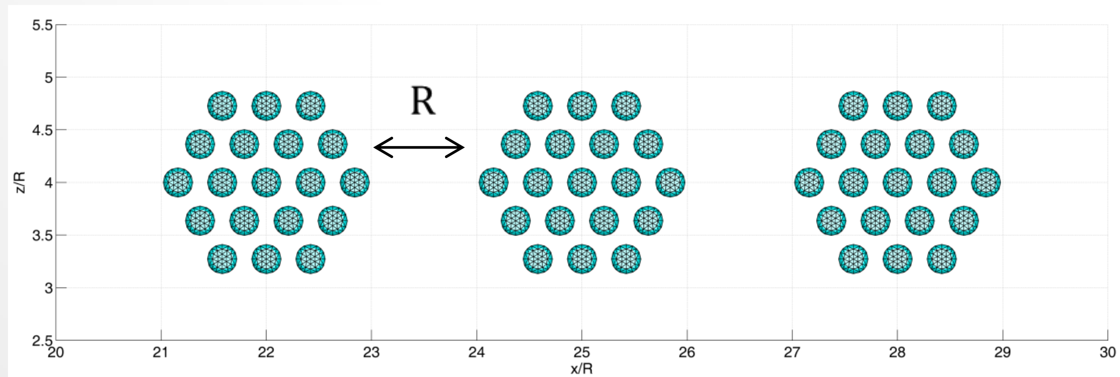
Экспериментальный канал



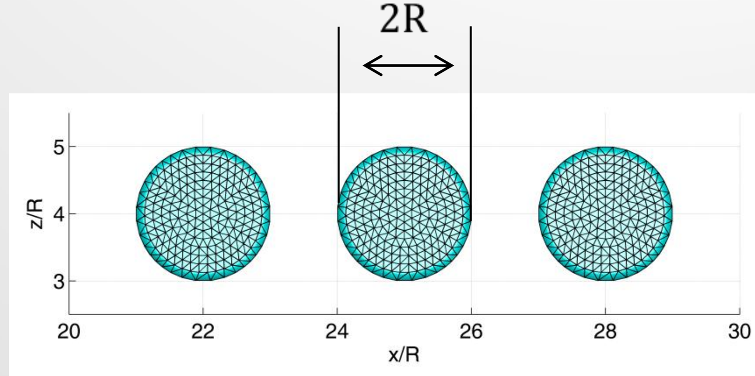
$\mathrm{R} = 7 \cdot 10^{-4}$м

$\mathrm{r} = 10^{-4}$м





$N_{\Delta 3}$=1 113 928

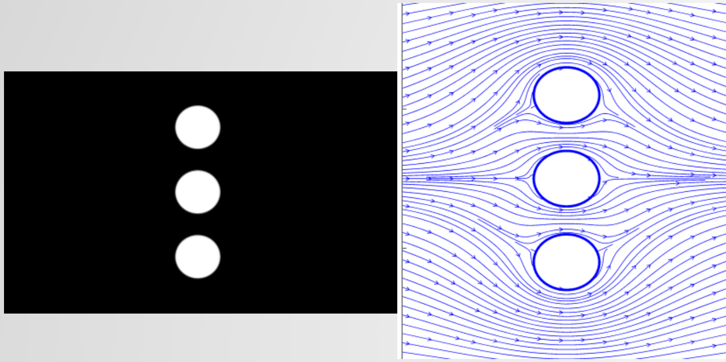


$\mathrm{r} = \frac{1}{7} R$

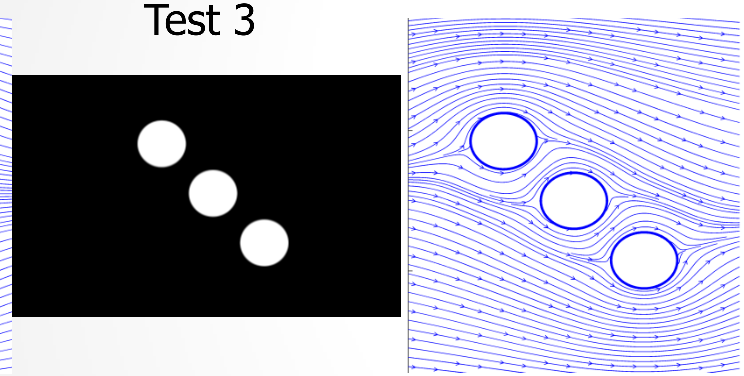
$N_{\Delta 1} = 428\,360$

Результаты моделирования

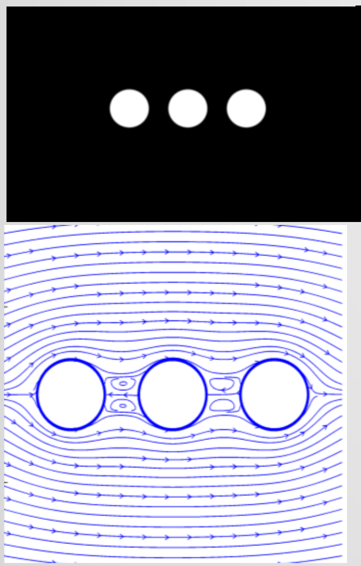
Test 2



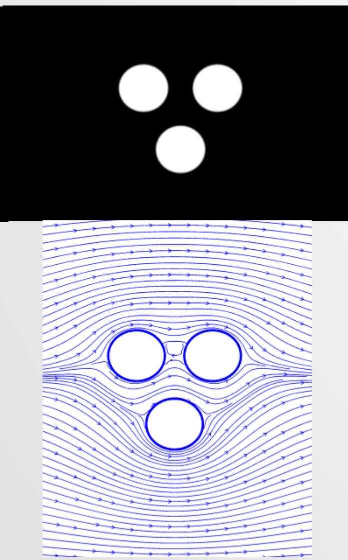
Test 3



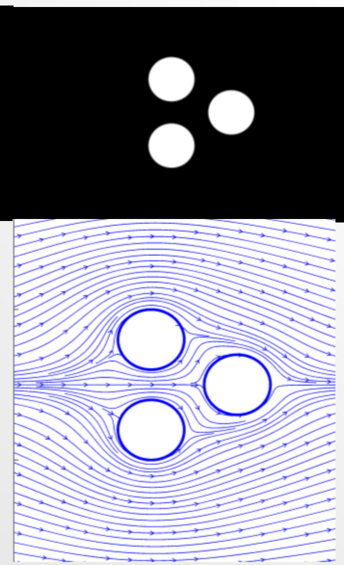
Test 1



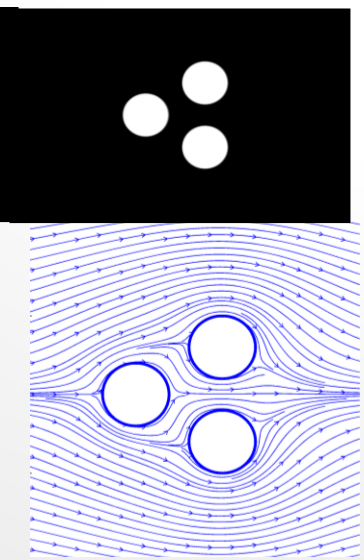
Test 4

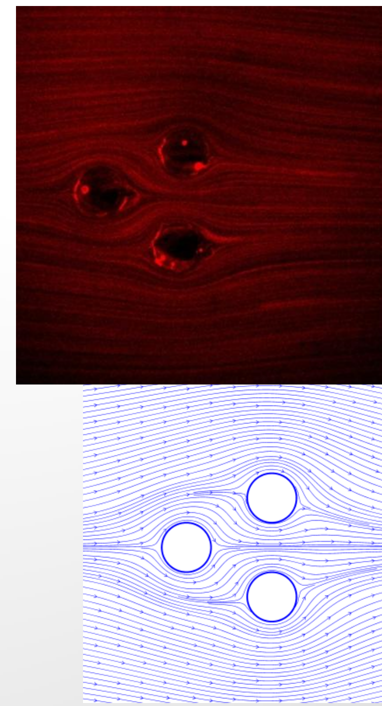


Test 5



Test 6

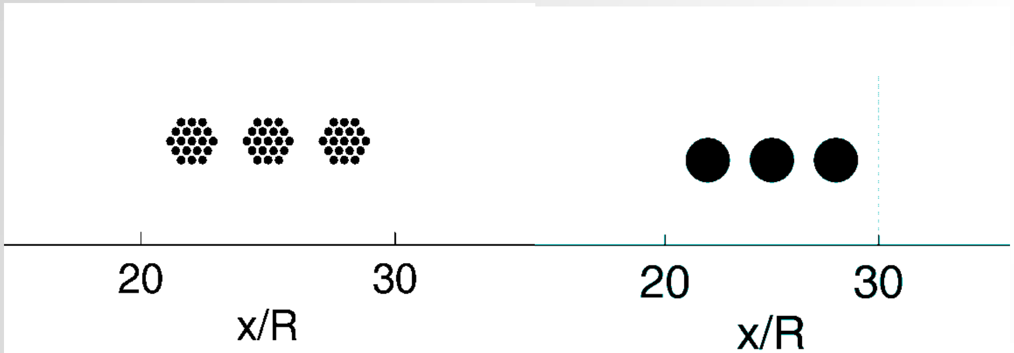




$N_{\Delta filaments} = 13720$ Общее количество расчетных узлов $N=428360$

$Re = 0.45$ Результаты представлены в плоскости $y = 0$

Результаты моделирования

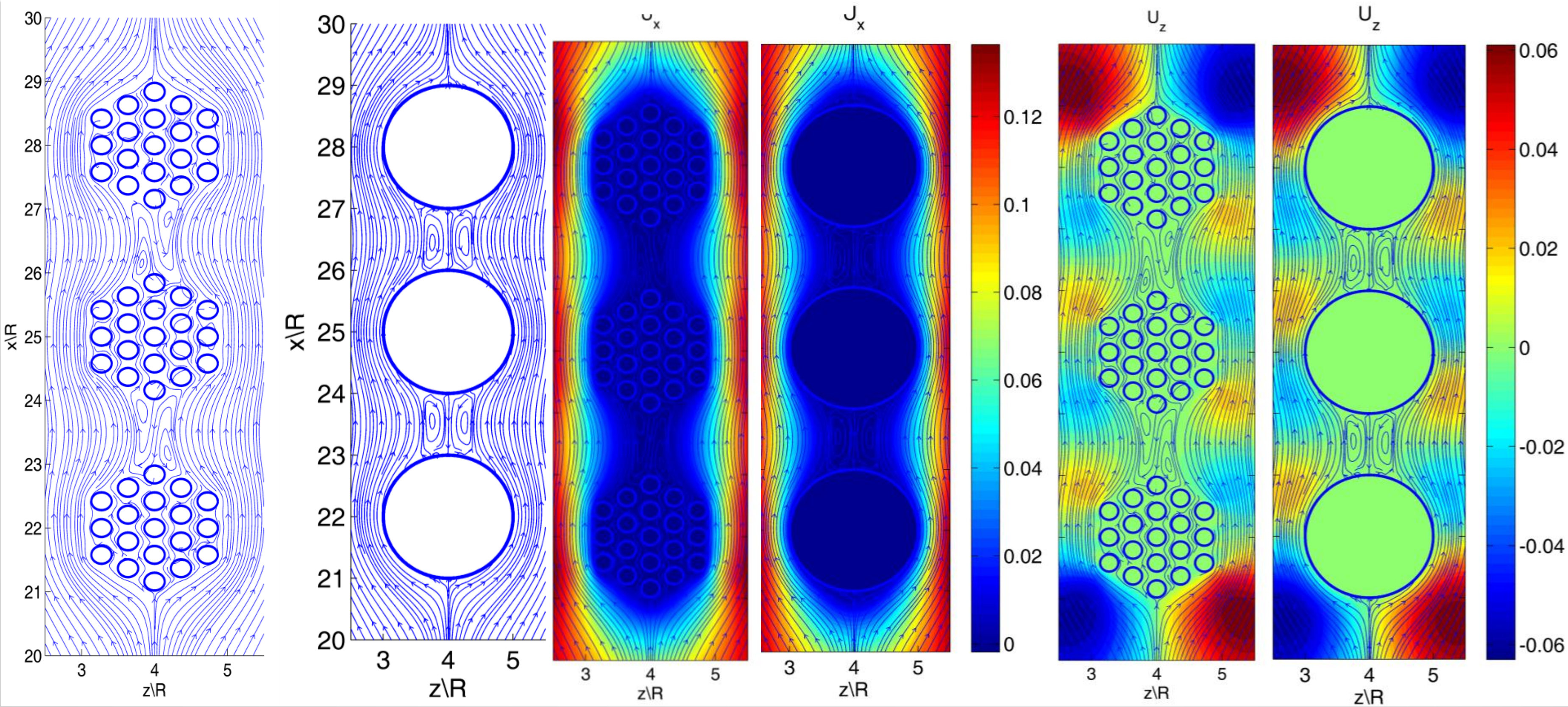


Результаты представлены в плоскости $y = 0$

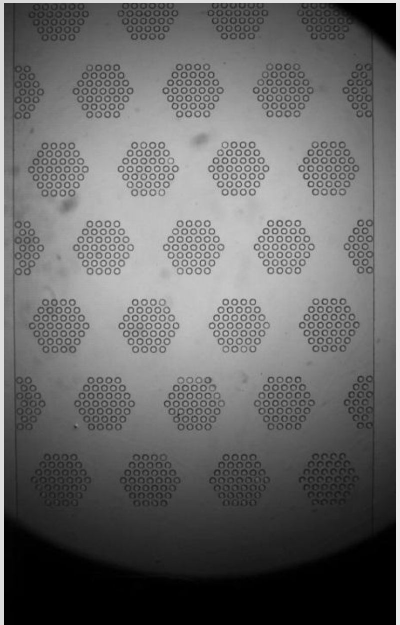
$N_{\Delta 3} = 1\,113\,928$

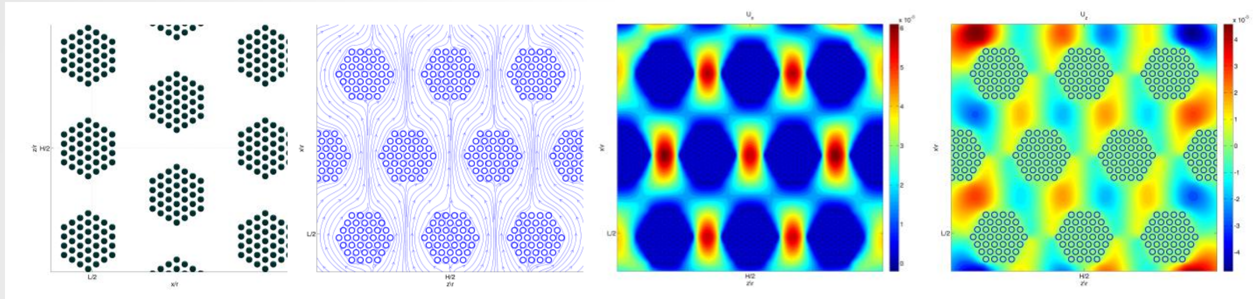
$N_{\Delta 1} = 428\,360$

$Re = 0.3$



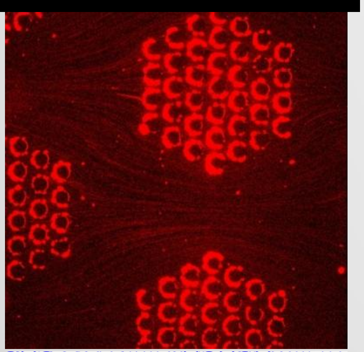
Сопоставление с экспериментом

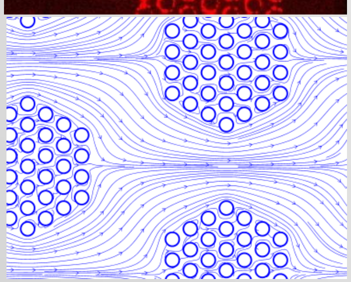


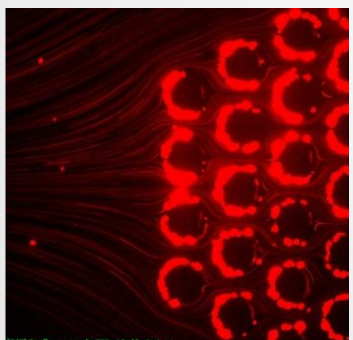


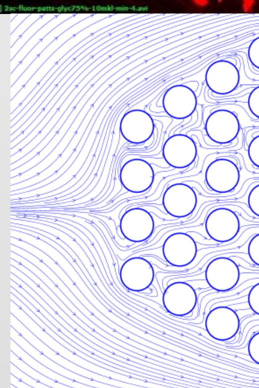
$N_{\Delta filaments} = 1544$ Общее количество расчетных узлов $N=2471392$

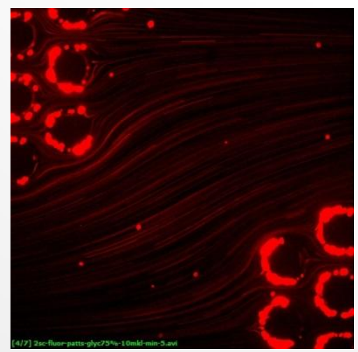
$Re = 0.1 \quad n = 666$

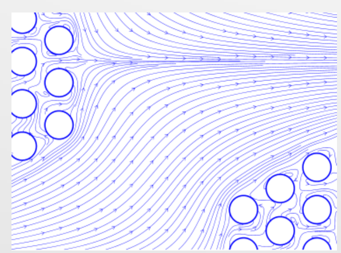


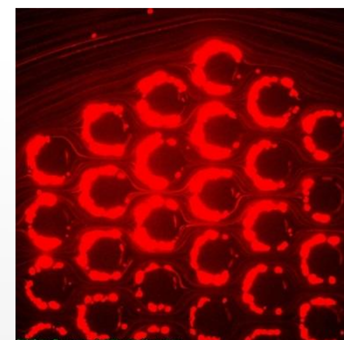


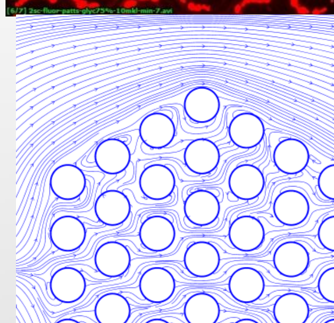








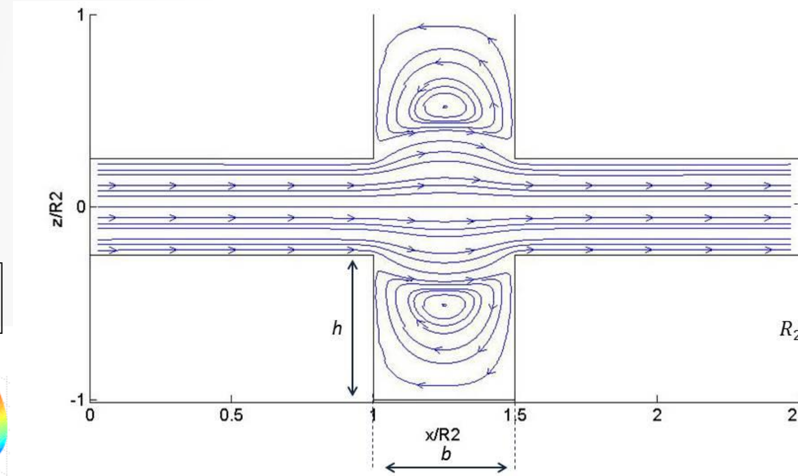




Течение вязкой жидкости в канале переменного кругового сечения

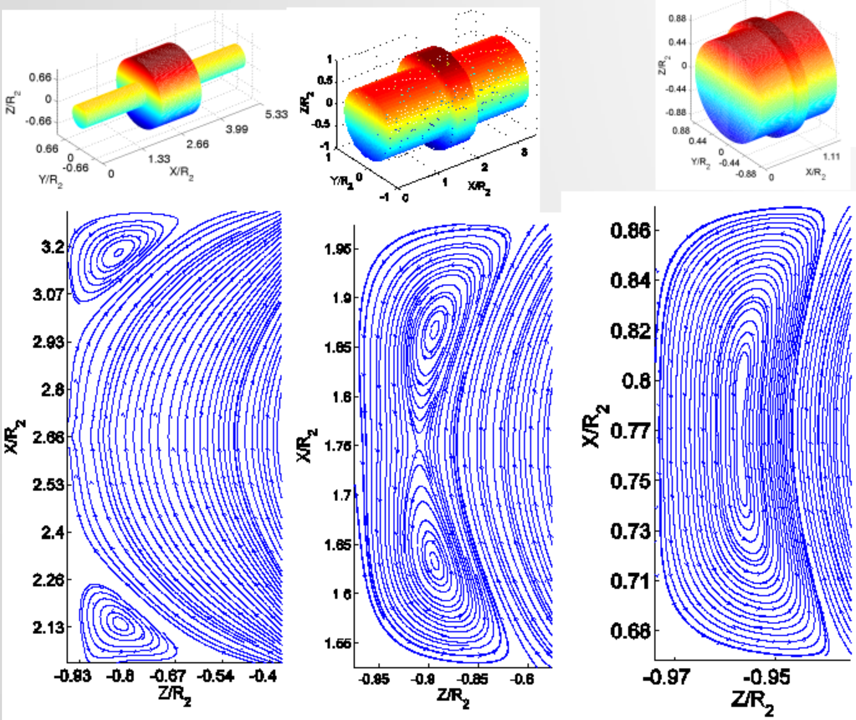
$K = \frac{h}{b}$ отношение глубины расширения к его длине

$W = \frac{R_1}{h}$ отношение радиуса узкой части канала к глубине расширения



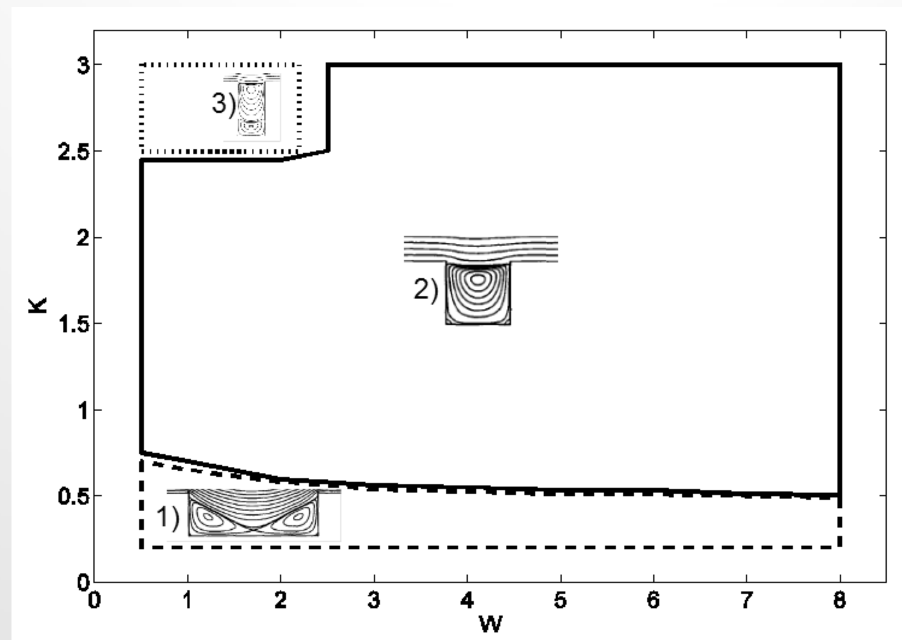
$N_\Delta = 67\,392$, $R_2/R_1 = 4$, $L/R_2 = 2.5$,

$W = 0.5$ $W = 4$ $W = 8$



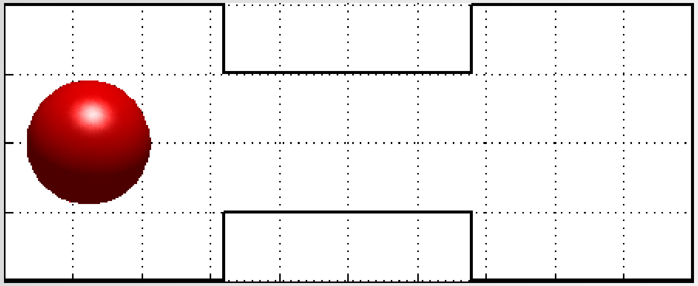
$K = 0.5$ $70\,000 \le N_{\Delta_{channel}} \le 90\,000$

Режимы течения в пространстве параметров W-K

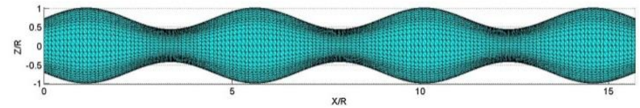


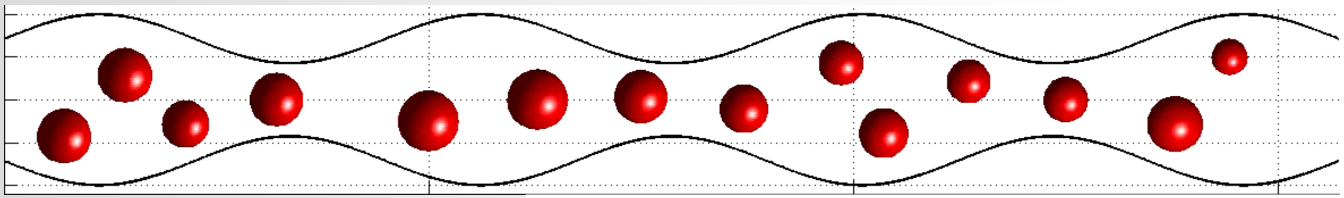
Taneda S., Visualization of separating Stokes flow. 1979

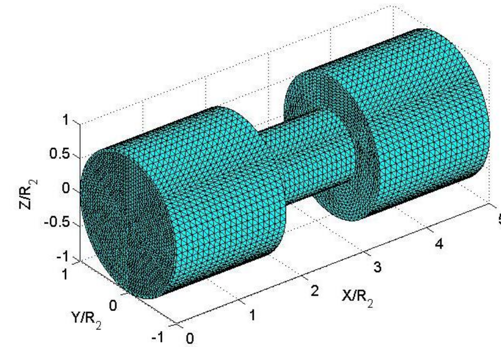
Применение подхода для моделирования течения эмульсий в различных областях

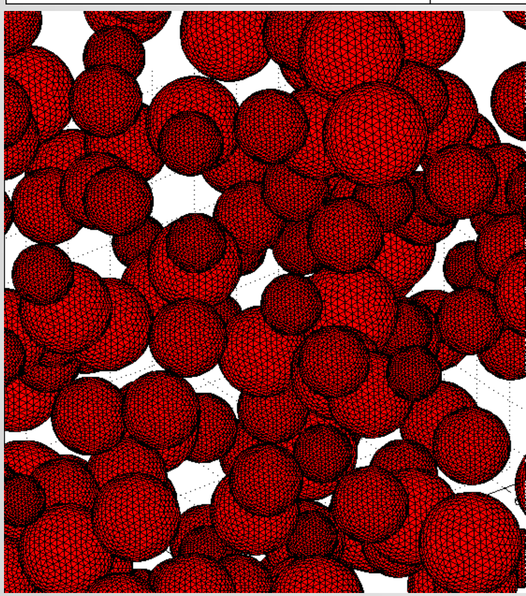


$$a/R_1 = 0.9,\ R_2/R_1 = 2,$$
$$\lambda = 1.5, P = 0.45, L/R_2 = 5,$$
$$N_{\Delta_{drop}} = 5\ 120,$$
$$N_{\Delta_{channel}} \approx 45\ 000$$

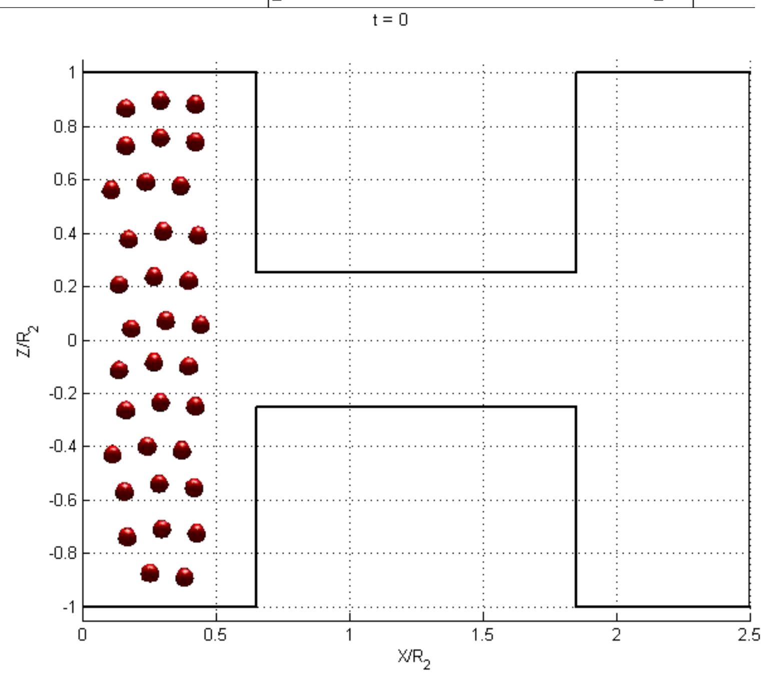


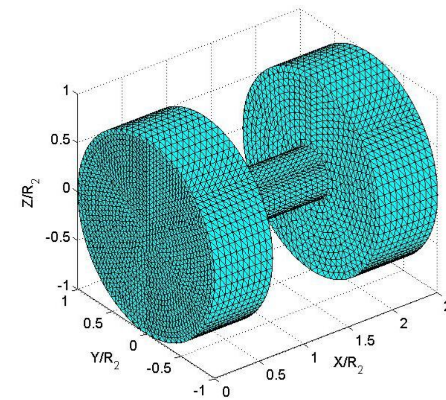






$$\lambda = 2, \quad 0.8 \leq Ca \leq 1.6,$$
$$N = 642, \ \alpha = 1.5 \cdot 10^{-2}$$





$$0.0136 \leq \frac{a}{R_2} \leq 0.0227$$
$$\frac{a}{R_2} = 0.035$$

Основные выводы

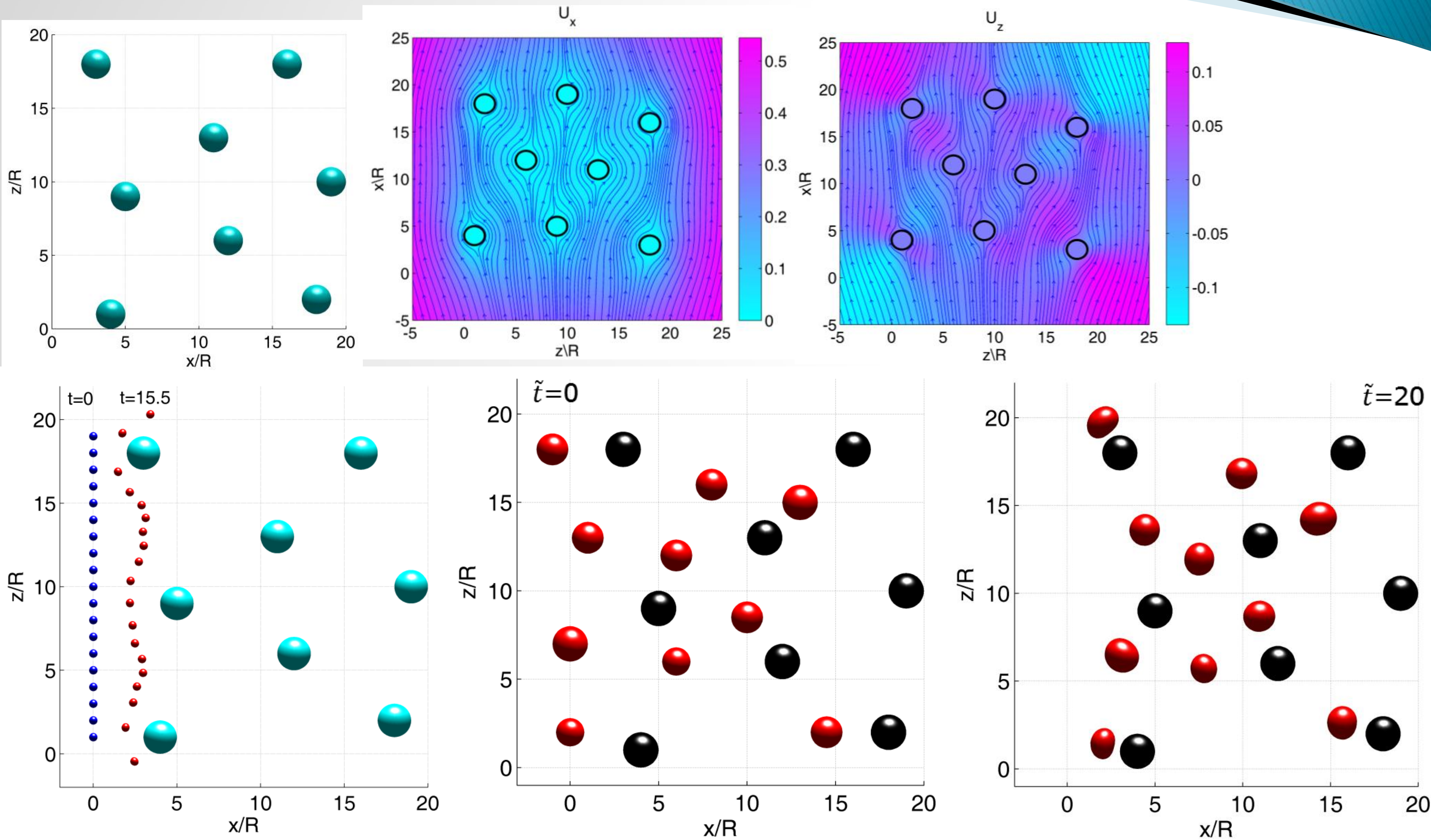
- Сформулирована гранично интегральная формулировка для случая обтекания неподвижных недеформируемых структур. Предложен и протестирован оригинальный алгоритм для решения краевых задач для уравнений Стокса высокой вычислительной сложности. Алгоритм основан на методе граничных элементов, ускоренным как за счет быстрого метода мультиполей, так и за счет использования многоядерных CPU и GPU.

- Продемонстрирована возможность применения реализованного подхода для моделирования трехмерной динамики деформируемых дисперсных включений в объеме вязкой жидкости при обтекании неподвижных недеформируемых структур.

- Проведены численные эксперименты по изучению полей скоростей при обтекании вязкой жидкостью отдельных волокон, а также рассмотрены структуры с двойной пористостью. Проведено сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными, полученными в лабораториях Центра Микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем.

Спасибо за внимание

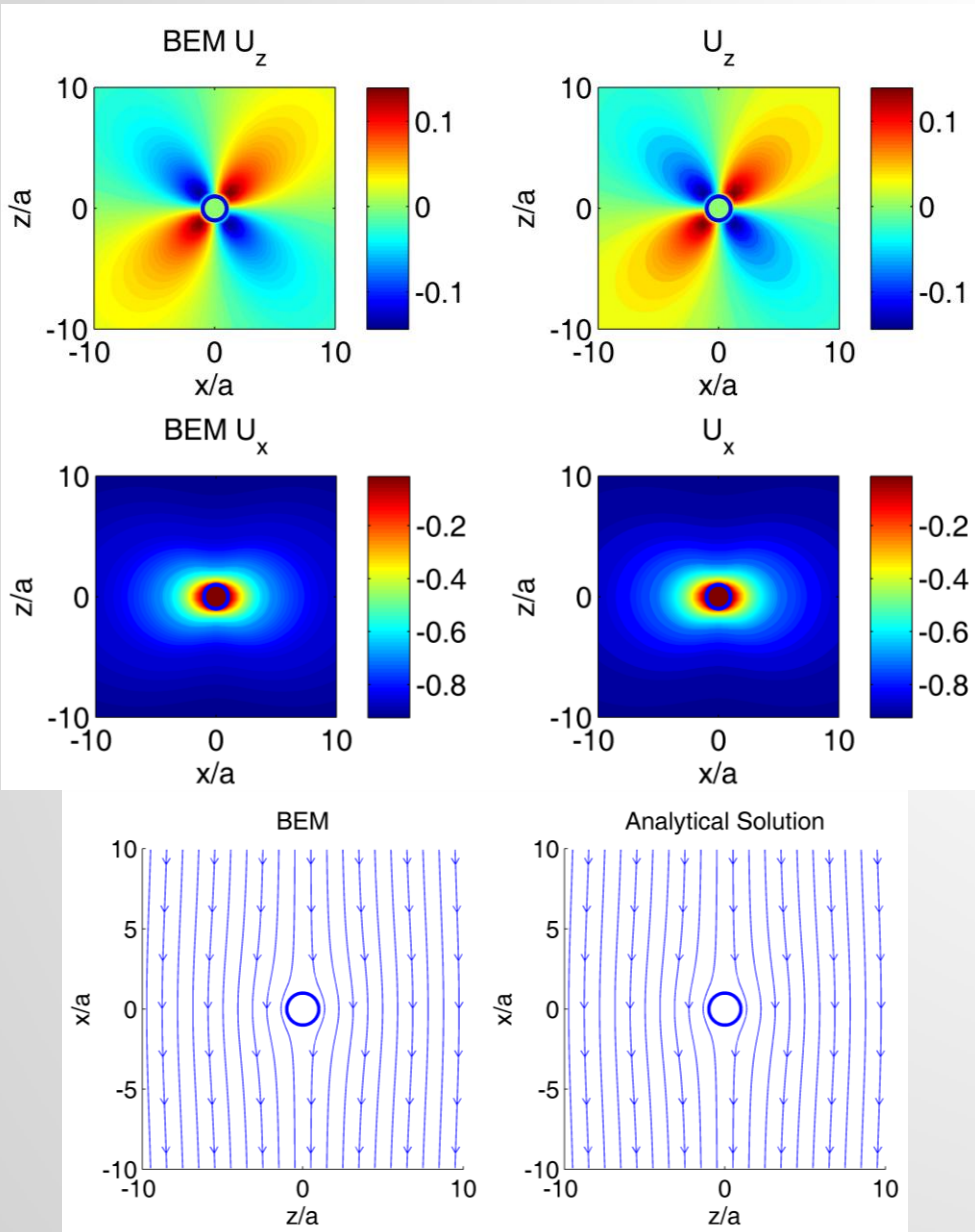
Демонстрационные расчеты



$\lambda = 1.5,\quad Ca = 0.2,\quad N_{\Delta drops} = 1380, a/R = 0.2\quad Re = 0.7\quad \lambda = 1.5,\quad 0.75 \le Ca \le 1$

$Ca = \mu_1 aG/\gamma\quad N_{\Delta filaments} = 13896\quad \tilde{t} = \gamma t_{dim}/(\mu_1 a)$

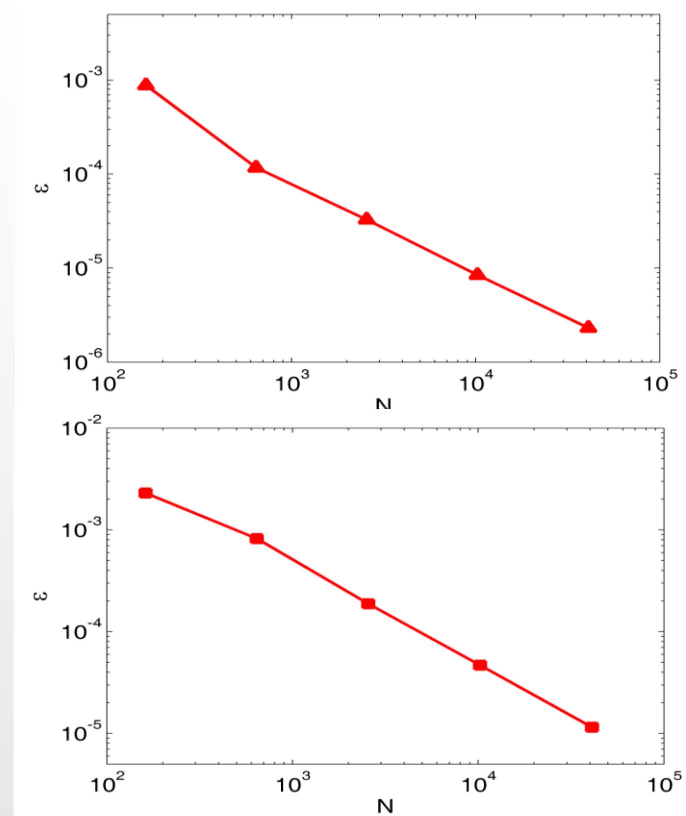
Верификация результатов



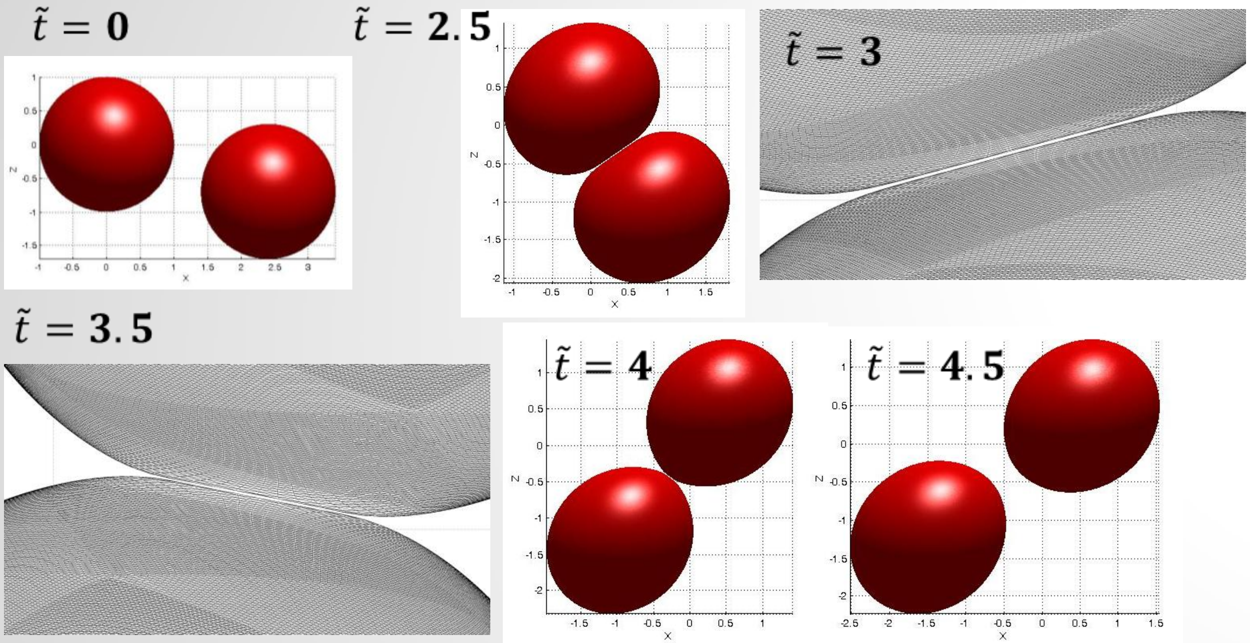
Сравнение с аналитическим решением для обтекания неподвижной твердой сферы

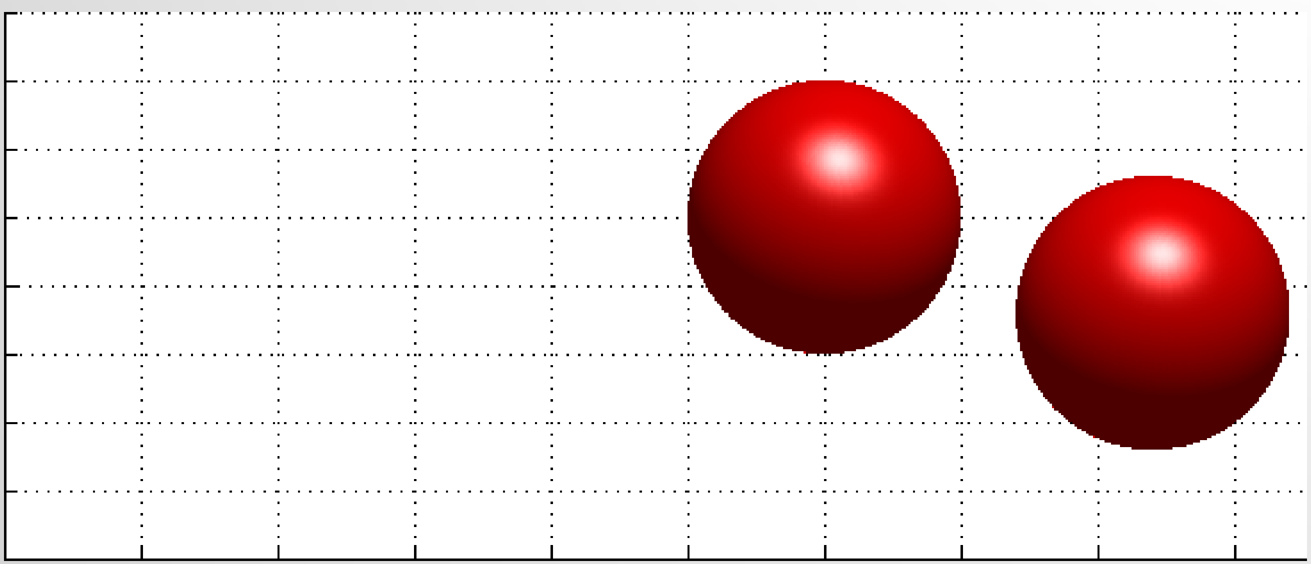
Относительная погрешность **f** на границе ~1.8 %, N=642

$U_x, U_z \sim$0.08-0.1%



Динамика двух деформируемых капель в сдвиговом потоке





$\lambda = 1 \qquad Ca = 0.05$

$a = a_1 = a_2$

Количество вершин на поверхности каждой капли

$N = 163\,842$

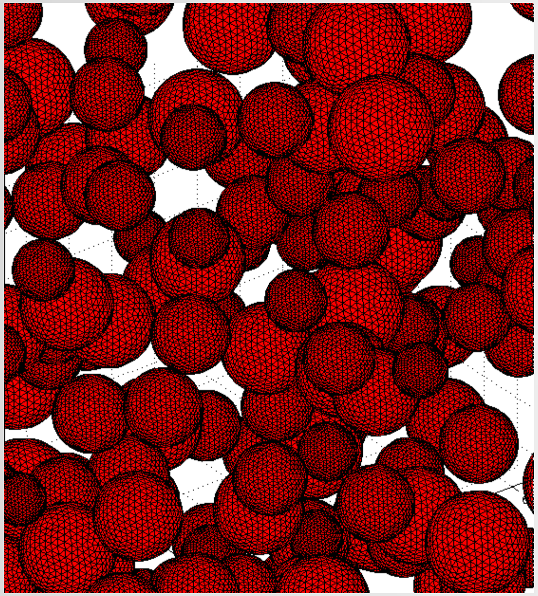
Количество треугольных элементов на поверхности каждой капли

$N_\Delta = 327\,680$

Начальное относительное расположение центров капель

$\Delta x = 2.4a, \Delta y = 0,$
$\Delta z = 0.7a$

Динамика 512 деформируемых капель в сдвиговом потоке



$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad ,$$

Численная поправка на тангенциальную составляющую скорости*

$$\mathbf{w}^i = \frac{N_\Delta^{\frac{3}{2}}}{300(1+\lambda)} (\mathbf{I} - \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i) \sum_{j=1}^{N} \left(1 + |2k_j|^{\frac{3}{2}}\right) \Delta S_j (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$$

**Loewenberg M., Hinch E. J*. Numerical simulation of a concentrated emulsion in shear flow. 1996.

Условие численной устойчивости*

$$\Delta\tilde{t} \leq K\mu_1 \Delta x_{min}/\gamma$$

$K \sim 0.1 - 0.2$, Δx_{min} – минимальное расстояние между узлами сетки

**Zinchenko A.Z., Davis R.H.,* An efficient algorithm for hydrodynamical interaction of many deformable drops. 2000

$$\lambda = 2, \qquad 0.8 \leq Ca \leq 1.6,$$
$$\mathrm{N} = 642, \ \alpha = 1.5 \cdot 10^{-2}$$

Обзор состояния проблемы

Метод граничных элементов (МГЭ) для уравнений Стокса

- ❖ МГЭ формулировка
  Rallison J.M., Acrivos A., 1978; Pozrikidis C., 1992
- ❖ Моделирование деформируемых капель
  Zinchenko A.Z. и др., 2003

- без FMM
- без GPUs

Быстрый метод мультиполей (FMM) для уравнений Стокса

Wang H. И др., 2007; Sangani A. И др., 1996

- недеформируемые границы
- без GPUs

Численное моделирование капельных течений в различных областях

Coulliette C., Pozrikidis C., 1998; Roca J.F., Carvalho M.S., 2013;
Tsai T.M., Miksis M.J., 1994; Zinchenko A.Z., Davis R.H., 2009

- симметричные области
- ограничен размер задачи

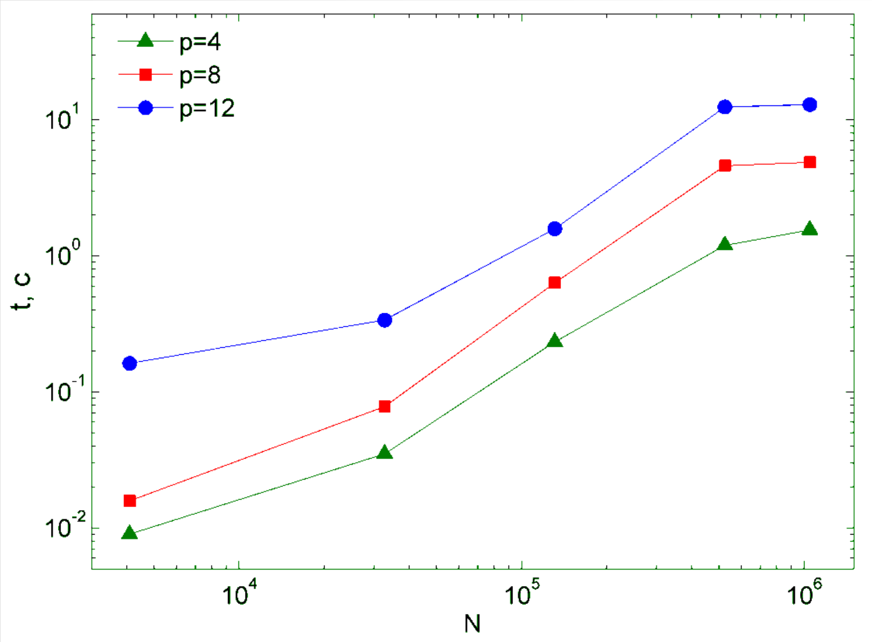
Настоящая работа

- ❖ МГЭ для деформируемых капель
- ❖ FMM
- ❖ GPU
- ❖ fGMRES + FMM

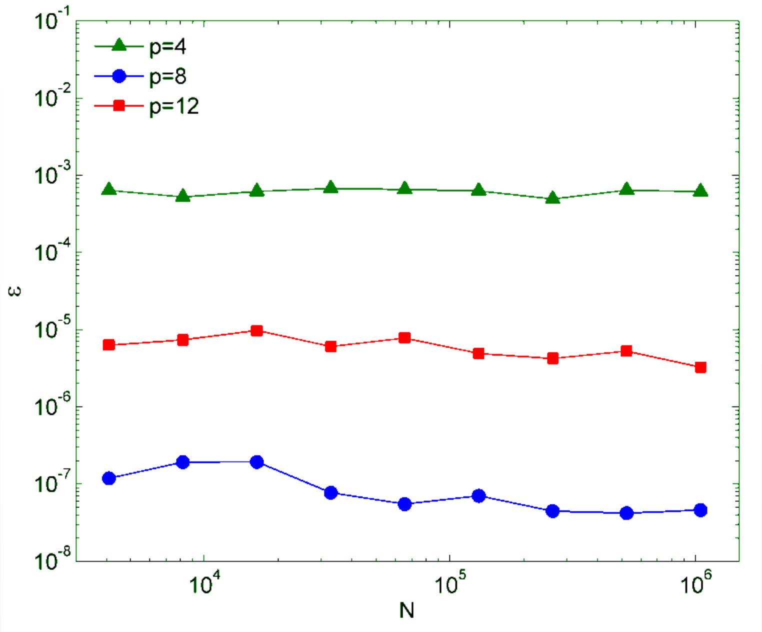
Моделирование динамики десятков тысяч деформируемых капель и капельных течений в каналах произвольной формы

Тестирование гетерогенного FMM для уравнений Стокса

Применяется FMM, предложенный в работах*, где суммирование фундаментальных решений уравнений Стокса сводится к суммированию фундаментальных решений трехмерного уравнения Лапласа



Время выполнения одного МВП для ядра **G** в зависимости от размера матрицы



Точность МВП для ядра **G** в зависимости от размера матрицы

CPU 2x Intel Xeon X5660, 2.8GHz, 12 cores, 12 GB RAM
GPU NVIDIA Tesla K20, 448 cores, 5GB, 1.03 Tflops single, 0.515 Tflops double

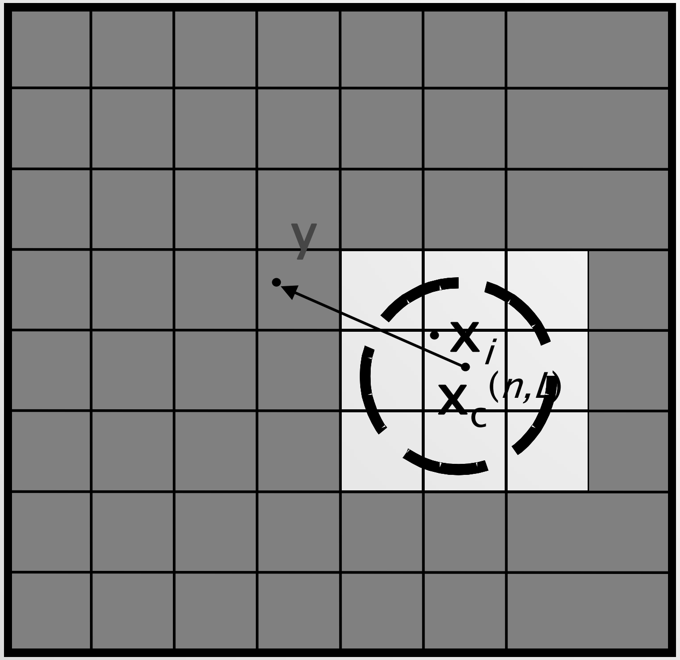
* *Tornberg A.K., Greengard L.* A fast multipole method for the three-dimensional Stokes equations. 2008
* *Wang H. et al* A parallel fast multipole accelerated integral equation scheme for 3D Stokes equations. 2007

From the finest to the coarsest level

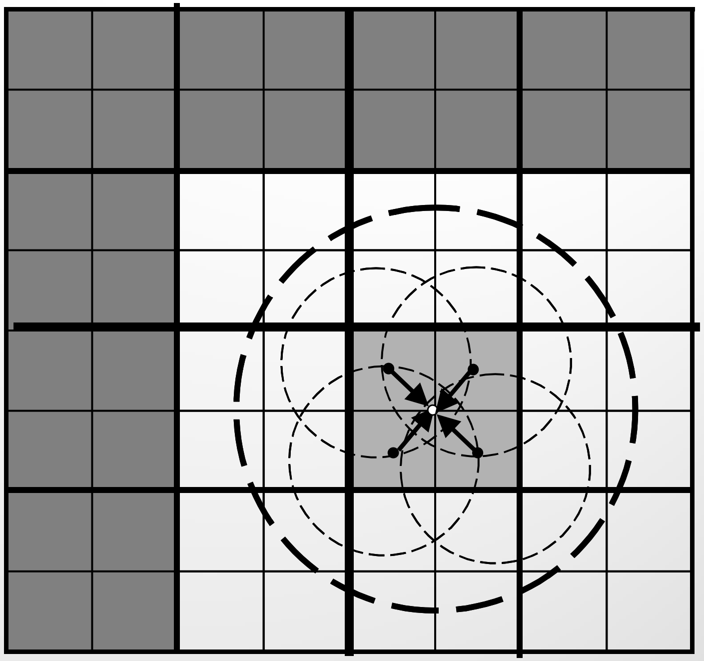
Get S-expansion for all nonempty boxes

S-expansion means singular, or multipole, or far field expansion

1. S-exp for Max Level



2. S-exp for other levels
S|S-translations

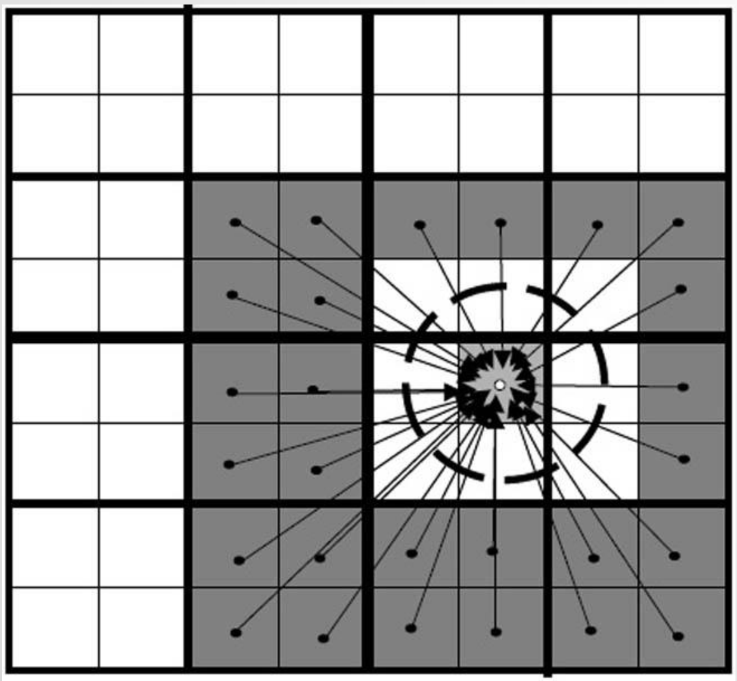


From the coarsest to the finest level

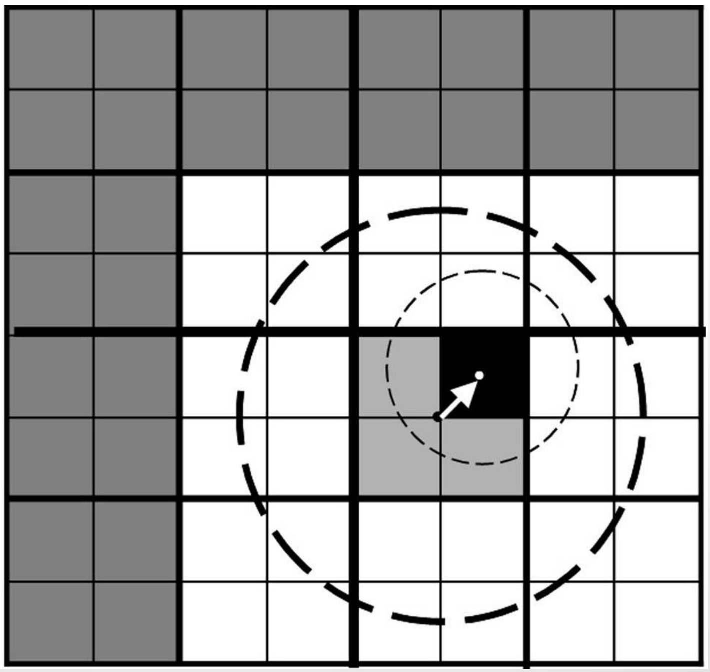
Get R-expansion for all nonempty boxes

R-expansion means regular, or local, or near field expansion

1. R-exp from S-exp's of the boxes in the neighborhood
S|R-translations



2. R-exp from parent
R|R-translations

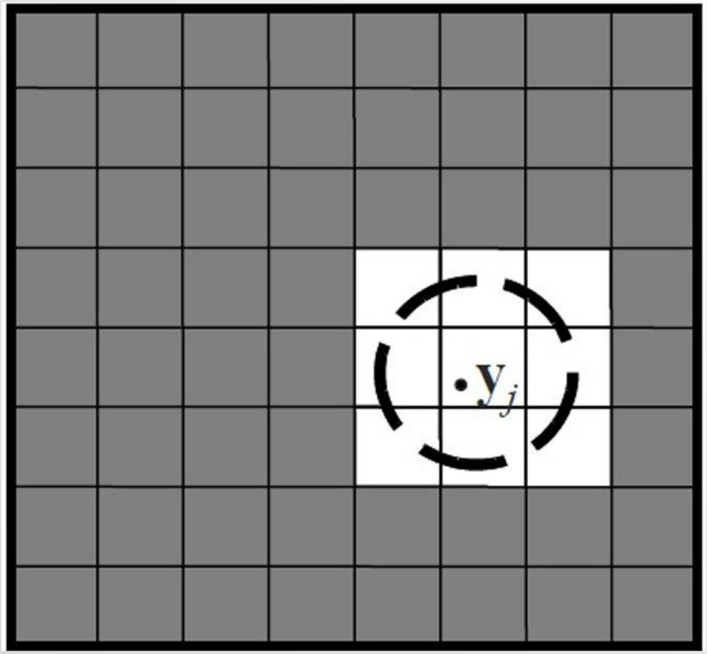


Evaluate R-expansion for boxes at Max Level

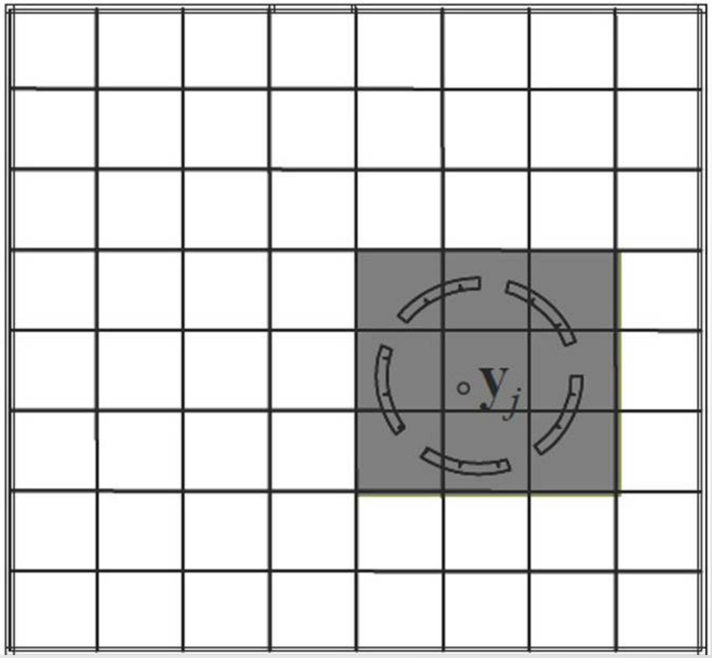
Direct summation of sources contribution

in the neighborhood of receivers

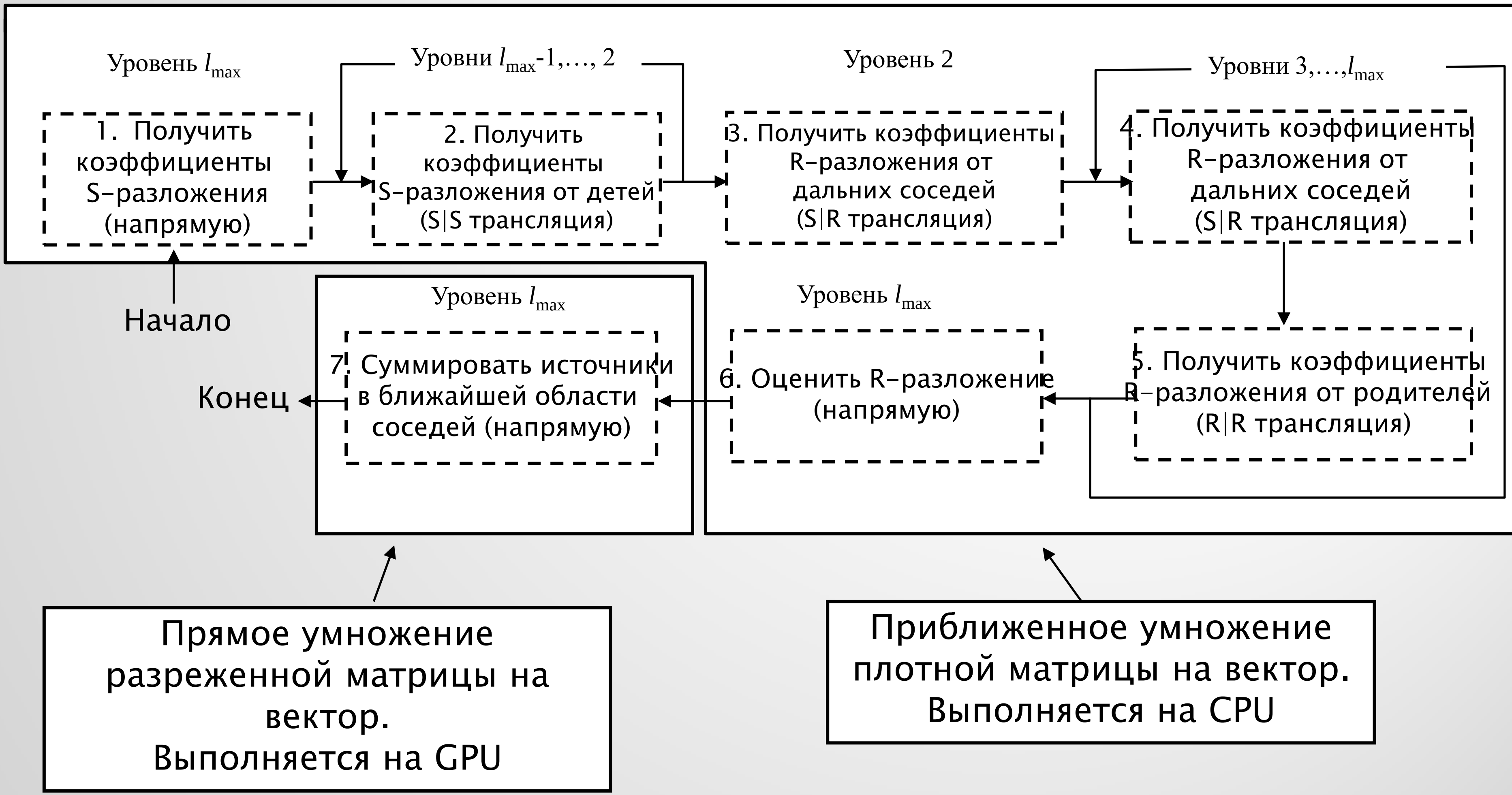
1. Evaluate R-expansion



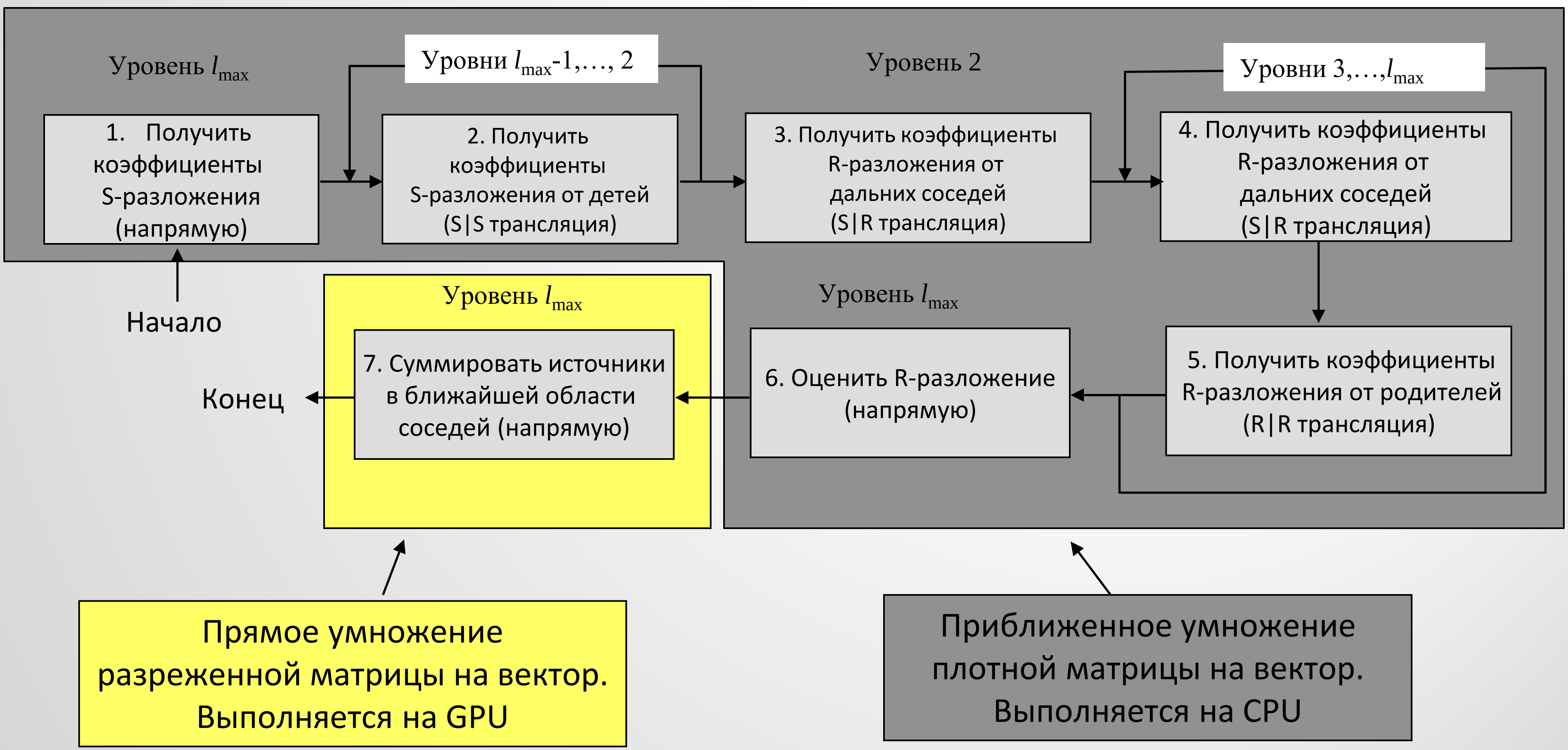
2. Direct summation



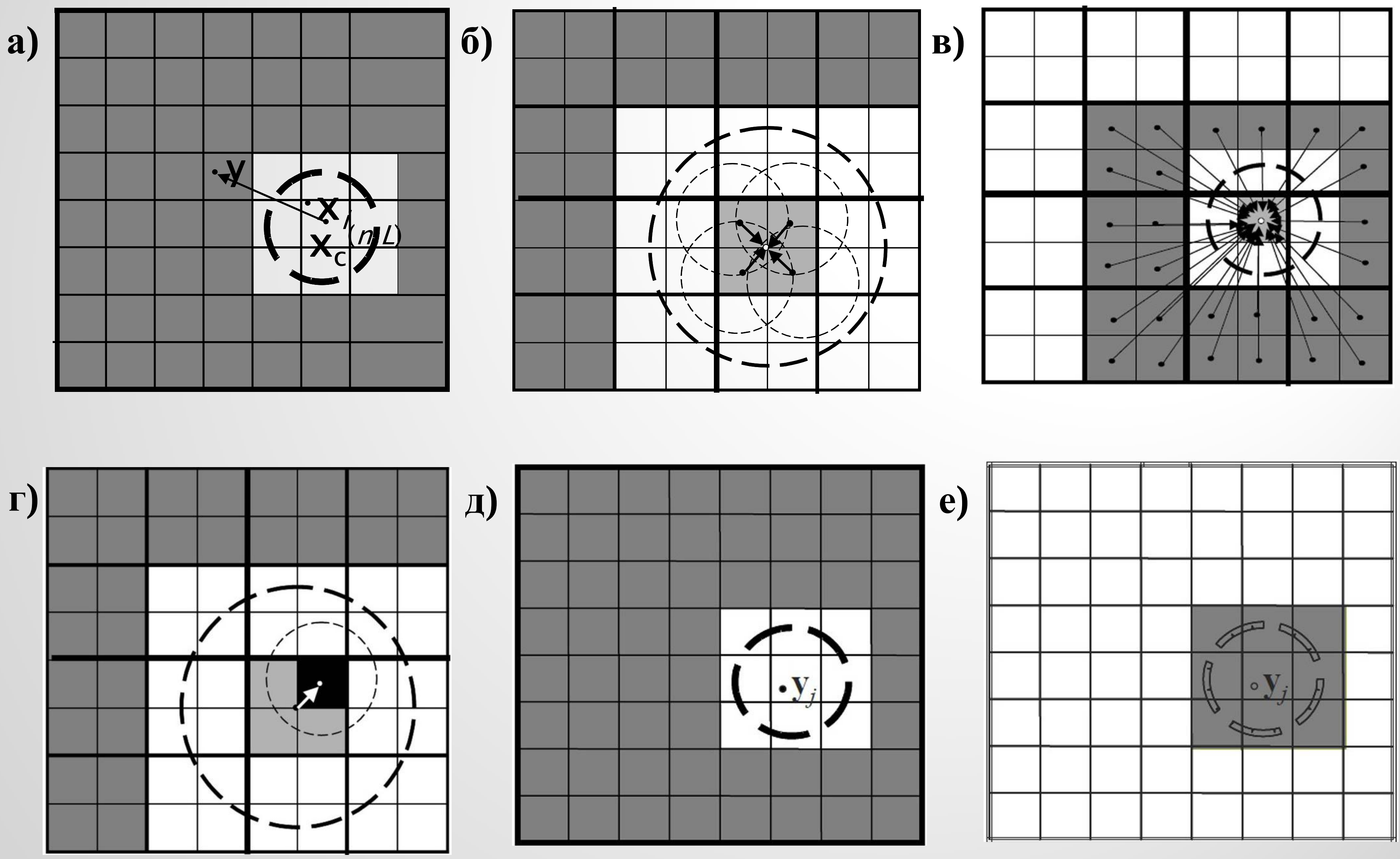
Блок-схема гетерогенного алгоритма FMM



Блок-схема гетерогенного алгоритма FMM



FMM



FMM для уравнений Стокса

Stokeslet factorization

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}\frac{1}{r} + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{k=1}^{3}\left[\mathbf{i}_k \frac{f_k}{r} - y_k \nabla_y \frac{f_k}{r}\right] + \nabla_y \frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{x})}{r}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x},$$

Stresslet factorization

$$\mathbf{v} = -3\frac{\mathbf{r}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})}{r^5} = \sum_{k=1}^{3}\left[-\mathbf{i}_k \frac{(\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{r})}{r^3} + y_k \nabla_y \frac{(\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{r})}{r^3}\right] - \nabla_y \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})}{r^3},$$

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{2}(\mathbf{n}u_k + \mathbf{u}n_k), \qquad \mathbf{c} = \frac{1}{2}[\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})], \qquad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x},$$

Stokeslet+stresslet factorization
(total 4 FMMs for the Laplace equation for one summation)

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{3}\left(\mathbf{i}_k\Phi_k - y_k\nabla_y\Phi_k\right) + \nabla_y\Phi_0,$$

$$\Phi_0 = \frac{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{x})}{r} - \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})}{r^3}, \;\; \Phi_k = \frac{f_k}{r} - \frac{(\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{r})}{r^3}, \;\; k = 1,2,3.$$

**Wang et al. 2007, Tornberg & Greengard, 2008*

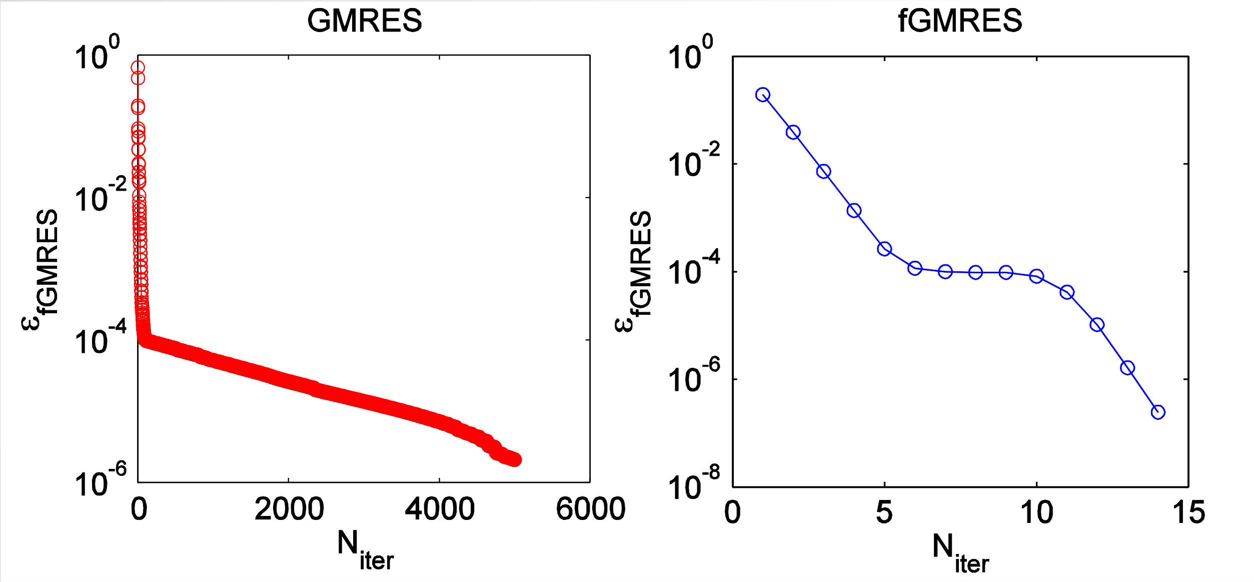
FMM алгоритм

Сравнение времени выполнения МВП прямым методом счета на CPU и на GPU и МВП с применением FMM (CPU/GPU) для стоклетов и стресслетов, p=8.

N	**Оптимальный l_{max}**	**Архитектура**	**Стоклеты**		**Стресслеты**	
			Время вычисления, с	Ускорение	Время вычисления, с	Ускорение
4 096	2	CPU	0.14	1	0.08	1
		GPU	0.007	20	0.006	13.3
		FMM CPU/GPU	0.04	3.5	0.035	2.3
32 768	3	CPU	2.486	1	2.18	1
		GPU	0.24	10.4	0.23	9.5
		FMM CPU/GPU	0.11	22.6	0.11	19.8
262144	4	CPU	147.78	1	135.7	1
		GPU	14.5	10.19	14.1	9.6
		FMM CPU/GPU	0.8	185	0.87	156
1 048 576	5	CPU	2379.3	1	2222	1
		GPU	239	9.96	225	9.87
		FMM CPU/GPU	5.1	466	5.3	419.2

Flexible GMRES

Разработанный итеративный решатель flexible GMRES* основывается на использовании FMM пониженной точности в предобуславливателе и позволяет значительно сократить количество итераций



Расчеты представлены для течения вязкой жидкости в цилиндрическом канале

Размер матрицы 5196 x 5196
FMM_p_in=4, FMM_p_out=8

Двойное использование гетерогенного FMM как для ускорения матрично-векторного произведения , так и для ускорения сходимости итерационного решателя, позволяет моделировать трехмерные течения в каналах произвольных форм.

*_Saad Y._ Iterative Methods for Sparse Linear System. 2003

Алгоритм flexible GMRES

Алгоритм GMRES

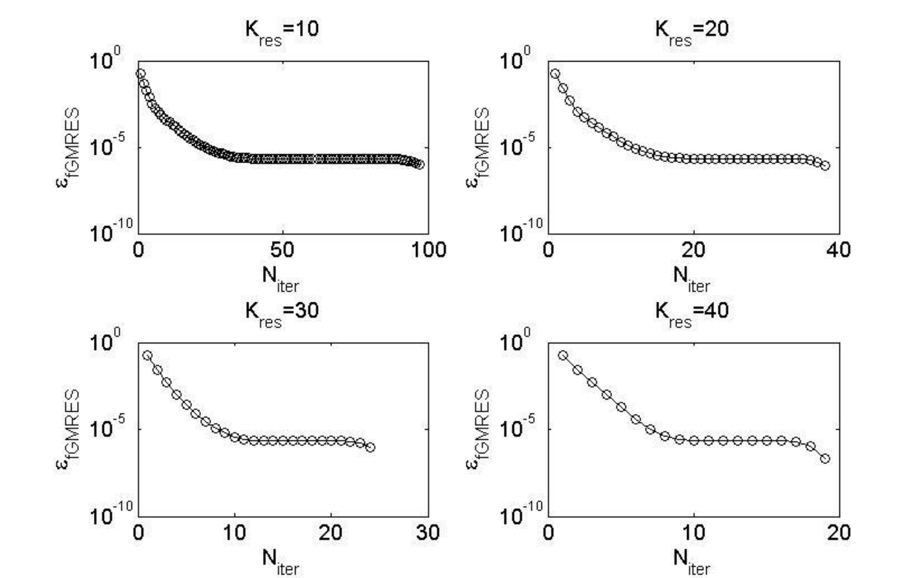
1. Вычислить $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\beta := \|\mathbf{r}_0\|_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0/\beta$.
2. Сформировать $(m+1) \times m$ матрицу $\bar{\mathbf{H}}_m = h_{ij\,1\le i\le m+1, 1\le j\le m}$. Положить $\bar{\mathbf{H}}_m = 0$
3. For $j = 1, 2, ..., m$ Do:
4. Вычислить $\mathbf{w}_j := \boxed{\mathbf{A}\mathbf{v}_j}$
5. For $i = 1, 2, ..., j$ Do:
6. $h_{ij} := (\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_i)$
7. $\mathbf{w}_j := \mathbf{w}_j - h_{ij}\mathbf{v}_i$
8. EndDo
9. $h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}_j\|_2$. If $h_{j+1,j} = 0$ then $m := j$ go to 12
10. $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}_j / h_{j+1,j}$
11. EndDo
12. Вычислить $\mathbf{y}_m$ минимизацию $\|\beta \mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|_2$ и $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_m \mathbf{y}_m$
13. Вычислить $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\beta := \|\mathbf{r}_0\|_2$. Продолжать пока $\beta > \varepsilon_{GMRES}$.

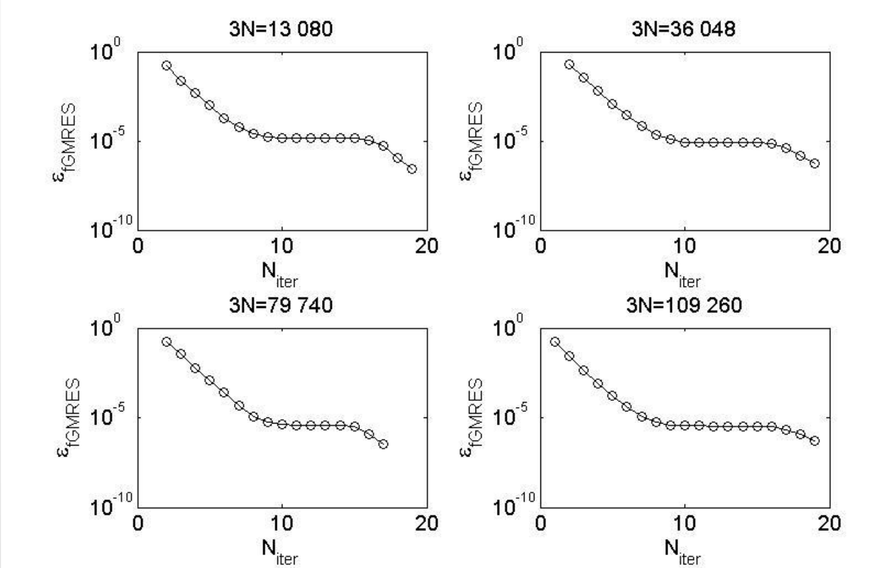
Заменить на FMM

Алгоритм fGMRES

1. Вычислить $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\beta := \|\mathbf{r}_0\|_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0/\beta$.
2. For $j = 1, 2, ..., m$ Do:
3. Вычислить $\mathbf{z}_j := \boxed{\mathbf{M}_j^{-1}\mathbf{v}_j}$
4. Вычислить $\mathbf{w} := \boxed{\mathbf{A}\mathbf{z}_j}$
5. For $i = 1, 2, ..., j$ Do:
6. $h_{ij} := (\mathbf{w}, \mathbf{v}_i)$
7. $\mathbf{w} := \mathbf{w} - h_{ij}\mathbf{v}_i$
8. EndDo
9. $h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}\|_2$ и $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{w}/h_{j+1,j}$.
10. Сформировать $\mathbf{Z}_m := [\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_m]$, $\bar{\mathbf{H}}_m = h_{ij\,1\le i\le j+1; 1\le j\le m}$.
11. EndDo
12. Вычислить $\mathbf{y}_m$ минимизацию $\|\beta e_1 - \bar{\mathbf{H}}_m y\|_2$ и $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}_0 + \mathbf{Z}_m \mathbf{y}_m$
13. Вычислить $\mathbf{r}_0 = b - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\beta := \|\mathbf{r}_0\|_2$. Продолжать пока $\beta > \varepsilon_{fGMRES}$.

Заменить на FMM





Расчет реологических параметров

Тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ для разбавленной эмульсии в сдвиговом потоке $\boldsymbol{u}_\infty = (Gy, 0, 0)$ в декартовой системе координат определяется как[1,*]

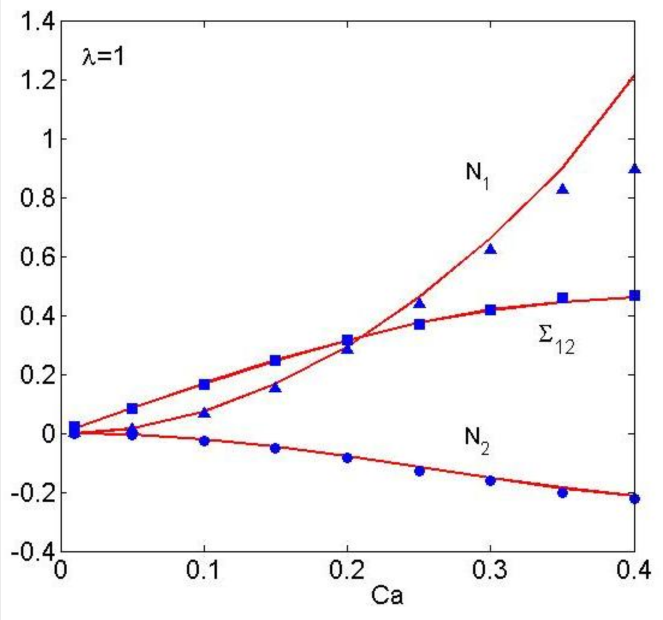
$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}p + 2\mu_1 e_{ij} + \alpha\Sigma_{ij}$$

Вклад непрерывной фазы

Вклад дисперсной фазы

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_2}\int_S \left[f_i x_j - \mu_1(1-\lambda)\left(u_i n_j + u_j n_i\right)\right] dS, \qquad i,j = 1,2,3.$$

Зависимость реологических функций от Ca для одной капли в сдвиговом потоке



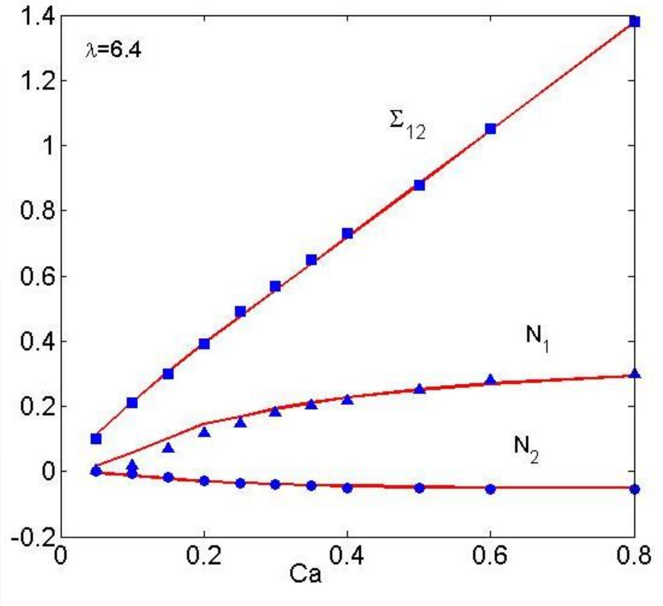
$N_1 = \Sigma_{11} - \Sigma_{22}$

Первая разность нормальных напряжений

$N_2 = \Sigma_{22} - \Sigma_{33}$

Вторая разность нормальных напряжений

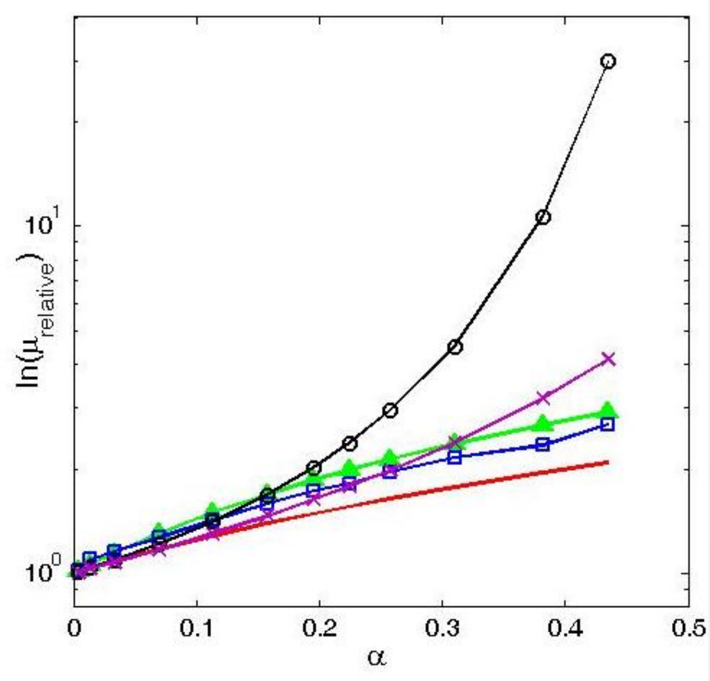
Сплошные линии – расчеты в данной работе
Символы – численные результаты*



[1] *Batchelor G. K. The stress system in a suspension of force-free particles. 1970/*

**Kennedy M.R, et al* Motion and deformation of liquid drops and the rheology of dilute emulsions in simple shear flow. 1994

Расчет реологических параметров



Расчет относительной вязкости для монодисперсной системы из сферических недеформируемых частиц при различных объемных содержаниях

$0.0695 \le \alpha \le 0.4349$ $N_\Delta = 1280, N = 729$ $Ca \ll 1, \lambda \gg 1$

формула Эйнштейна $\mu_{relative} = 1 + 2.5\alpha$

Формула* $\mu_{relative} = 1 + 4\alpha$

формула Доерти-Кригера $\mu_{relative} = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_{max}}\right)^{-\alpha_{max}2.5}$

формула Муни $\mu_{relative} = exp\left(\frac{2.5\alpha}{1 - \alpha/\alpha_{max}}\right)$

расчеты

* Ward S.G., Whitmore R.L. Studies of the viscosity and sedimentation of suspensions Part 1. The viscosity of suspension of spherical particles 1950

Сравнение значений относительной вязкости для упорядоченной монодисперсной системы

$\lambda = 1$

$Ca = 0.01$

$\alpha = 17.96\%$

Sangani $\mu_{relative} = 1.30$

$\lambda = 0.08, \quad Ca = 0.4$

Расчеты $\mu_{relative} = 1.29$

$\lambda = 6.4$

$Ca = 0.05$

$\alpha = 0.153\%$

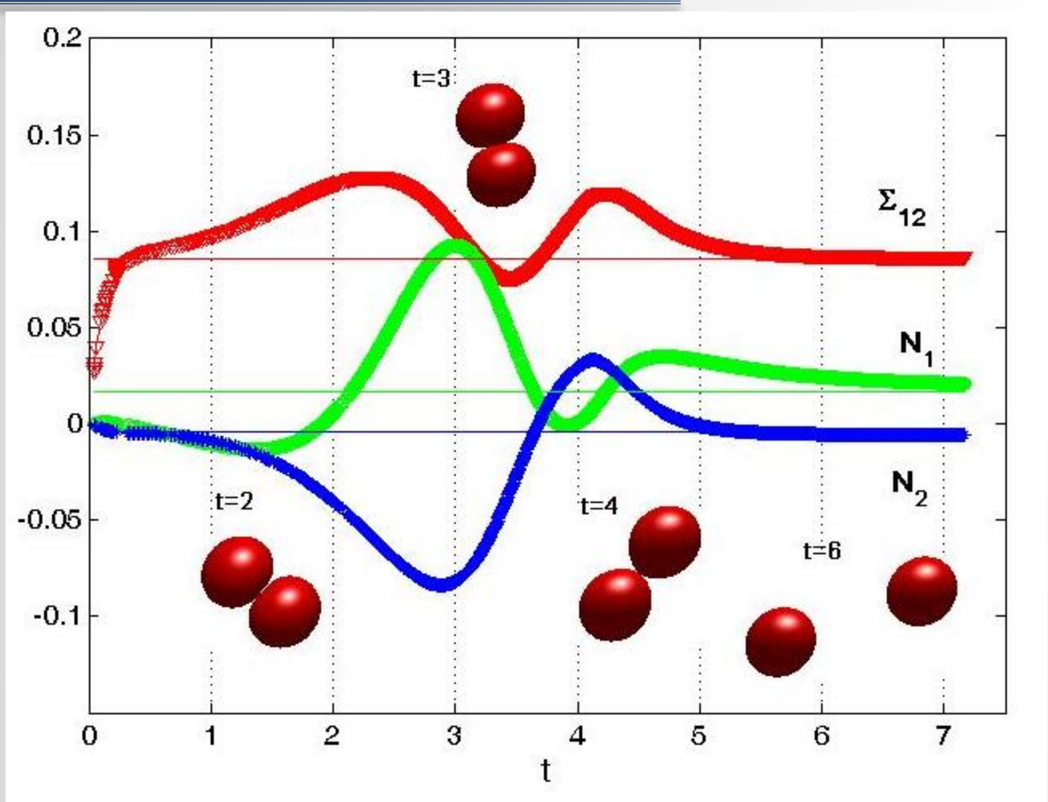
Pozrikidis $\mu_{relative} = 1.03$

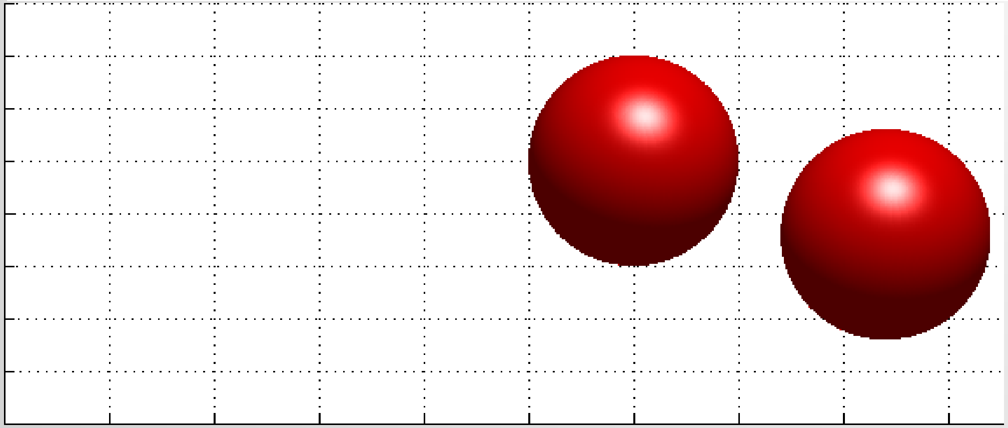
Расчеты $\mu_{relative} = 1.03$

[1] Sangani A.S., Lu W. Effective viscosity of an ordered suspension of small drops, 1987

[2] Pozrikidis C. On the transient motion of ordered suspensions of liquid drops, 1993

Динамика двух деформируемых капель в сдвиговом потоке и расчет реологических параметров





Количество вершин на поверхности каждой капли

$$N = 163\,842$$

Количество треугольных элементов на поверхности каждой капли

$$N_\Delta = 327\,680$$

Значения реологических функций для заданных параметров для одной капли в сдвиговом потоке

$$\Sigma_{12} = 0.0853 \qquad N_1 = 0.0169 \qquad N_2 = -0.0043$$

$$\lambda = 1 \qquad Ca = 0.05 \qquad a = a_1 = a_2$$

Начальное относительное расположение центров капель

$$\Delta x = 2.4a, \Delta y = 0, \Delta z = 0.7a$$

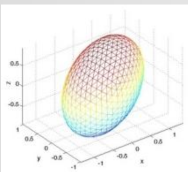
Расчет реологических параметров для упорядоченной эмульсии

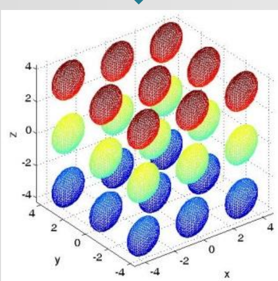
$\lambda = 0.08$

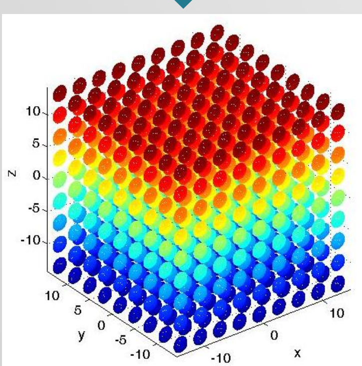
$Ca = 0.35$

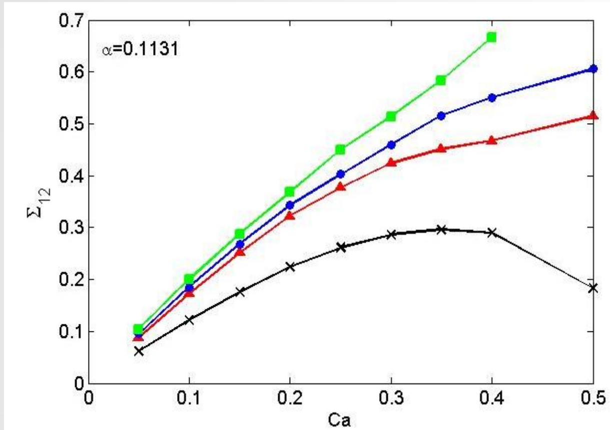
$N = 642$

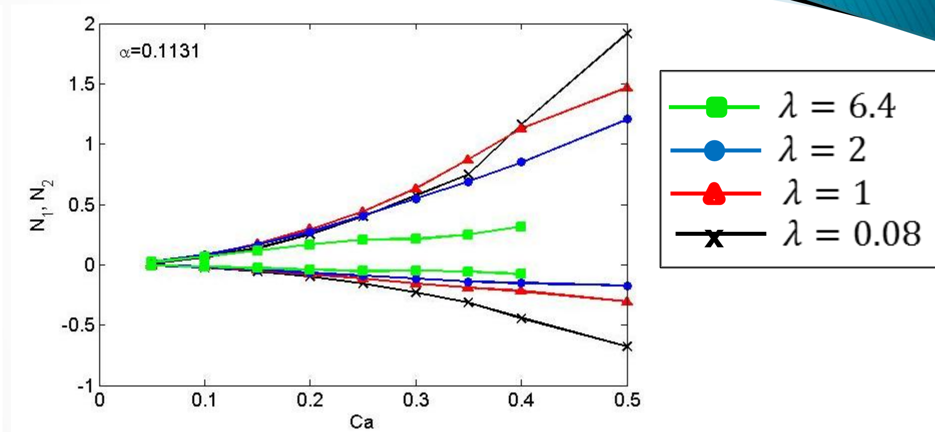
$\alpha = 11.31\%$





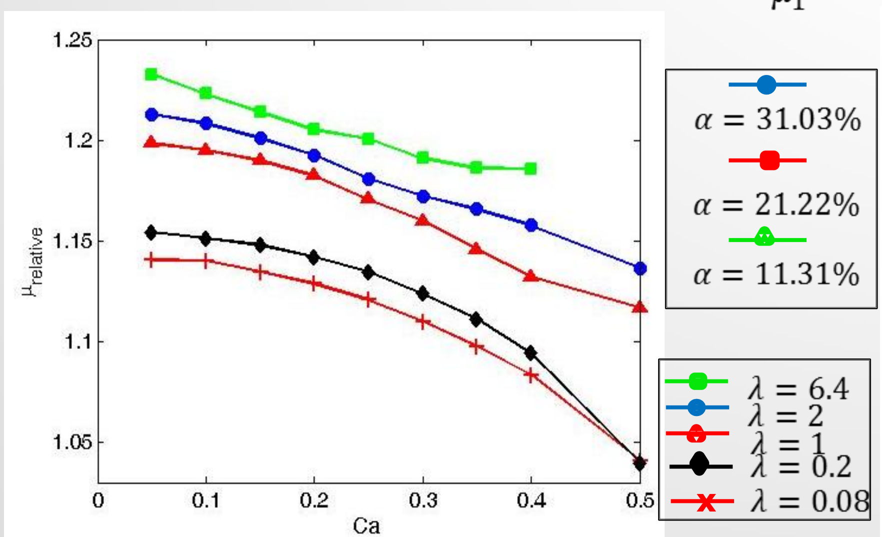


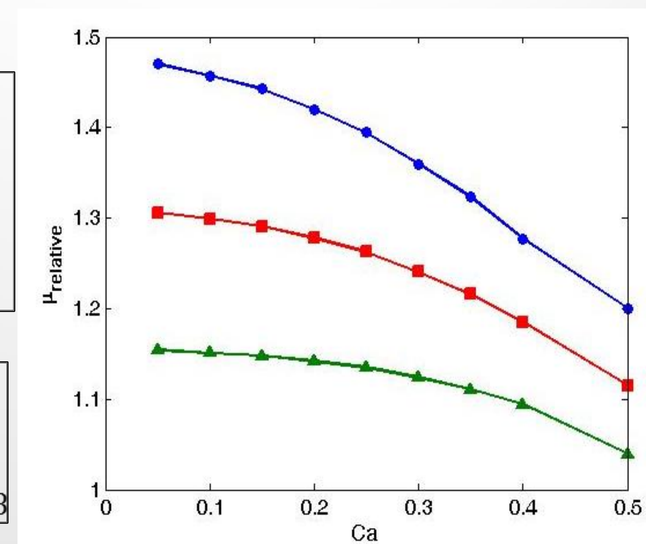




Изменение относительной вязкости эмульсии в зависимости от Ca при различных объемных концентрациях и λ

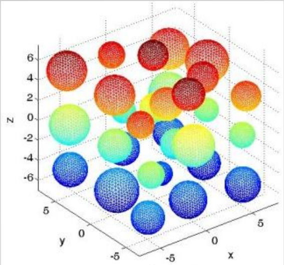
$$\mu_{effective} = \mu_1 + \alpha \Sigma_{12} / G^* \qquad \mu_{relative} = \frac{\mu_{effective}}{\mu_1}$$





*Kennedy M.R, et al. Motion and deformation of liquid drops and the rheology of dilute emulsions in simple shear flow. 1994

Расчет относительной вязкости полидисперсной эмульсии

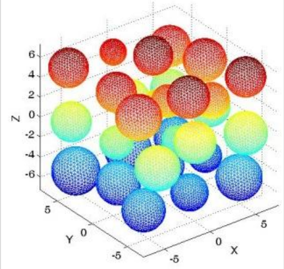


30 капель в ячейке

$0.52 \le Ca \le 0.96$

$\alpha \approx 10\%$ $\quad N = 642$

$\lambda = 1$



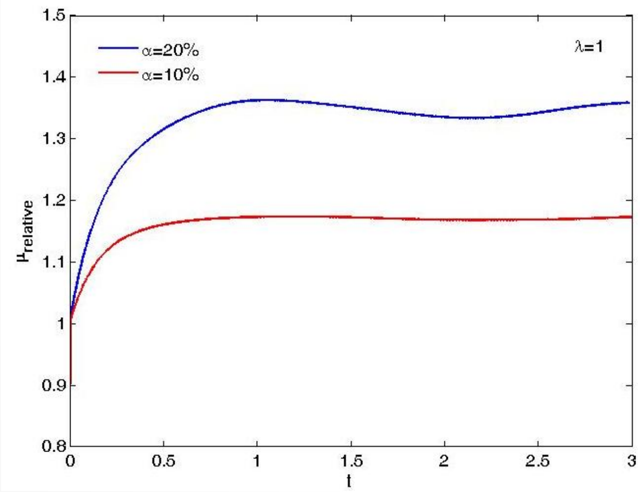
31 капля в ячейке

$0.58 \le Ca \le 1.05$

$\alpha \approx 20\%$ $\quad N = 642$

$\lambda = 1$

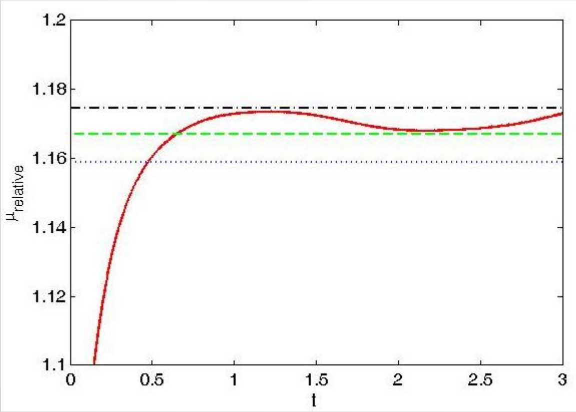
Графики относительной вязкости эмульсии



Графики относительной вязкости эмульсии, рассчитанные по различным формулам* $\alpha \approx 10\%$

$$\mu_{rel}\left[\frac{M-P+32\mu_{rel}}{M-P+32}\right]^{N-1.25}\left[\frac{M+P-32}{M+P-32\mu_{rel}}\right]^{N+1.25} = (1-\alpha)^{-2.5}$$

$$\mu_{rel}\left[\frac{M-P+32\mu_{rel}}{M-P+32}\right]^{N-1.25}\left[\frac{M+P-32}{M+P-32\mu_{rel}}\right]^{N+1.25} = \left(1-\frac{\alpha}{\alpha_{max}}\right)^{-2.5\alpha_{max}}$$



$$M = \sqrt{64/Ca^2 + 1225\lambda^2 + 1232(\lambda/Ca)}$$

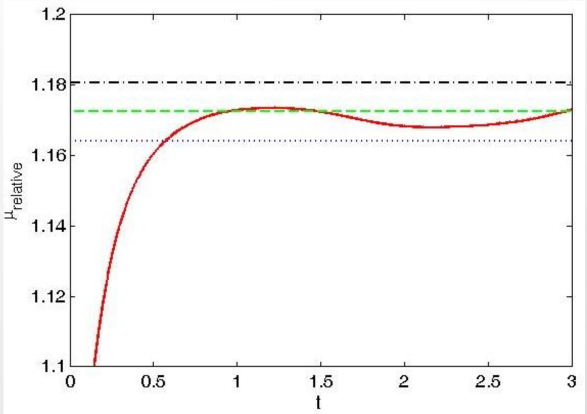
$$P = 8/Ca - 3\lambda$$

$$N = \frac{22/Ca + 43.75\lambda}{M}$$

$\mu_{relative}(a_{max})$

$\mu_{relative}(a_{aver})$

$\mu_{relative}(a_{min})$

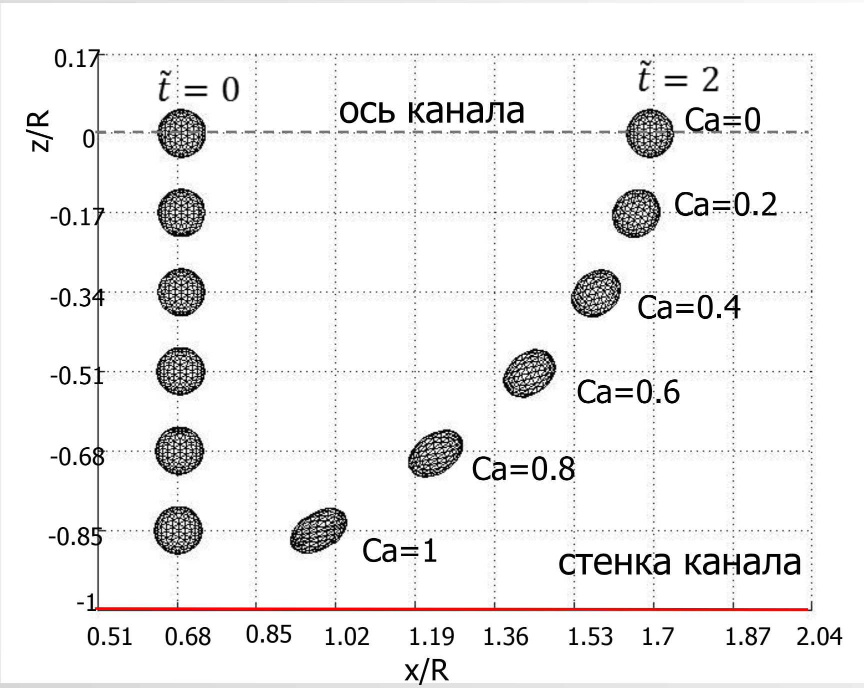


*Pal R. Viscous behavior of concentrated emulsions of two immiscible Newtonian fluids with interfacial tension. 2003

Верификация результатов
Периодическое течение капель эмульсии в цилиндрическом канале

Сравнение для течения жидкости в цилиндрическом канале с аналитическим решением для течения Пуазейля

Относительная погрешность f на границе ~1.9% внутри канала: V_x ~1.5% V_z ~1.1%



$\lambda = 1.5,\quad P = 0.6,\quad R/L = 0.43,\quad a/R = 0.07$

$N_{\Delta chanel} = 3368 \quad N_{\Delta drop} = 320$

Безразмерные параметры

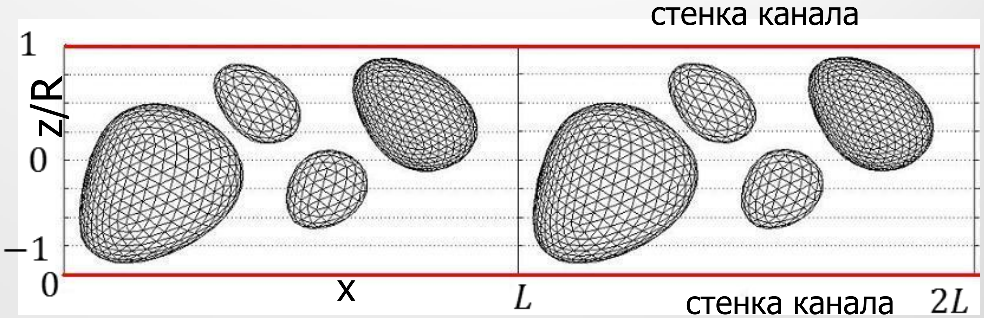
Локальное капиллярное число $Ca = \mu_1 aG/\gamma$

Безразмерное время

FMM МГЭ подход $O(N)$

$P = Ra\Delta p/(\gamma L)$

Скорость сдвига в канале $G = 2z_0\Delta p/(\mu_1 L)$

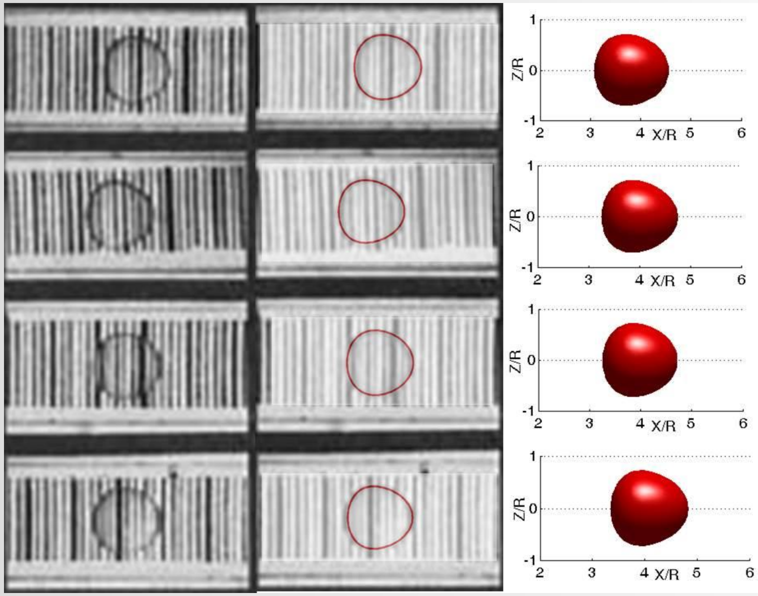


$\lambda = 1.5,\quad P = 1.4,\quad R/L = 0.29,\quad a/R = 0.35,$
$\tilde{t} = 2$

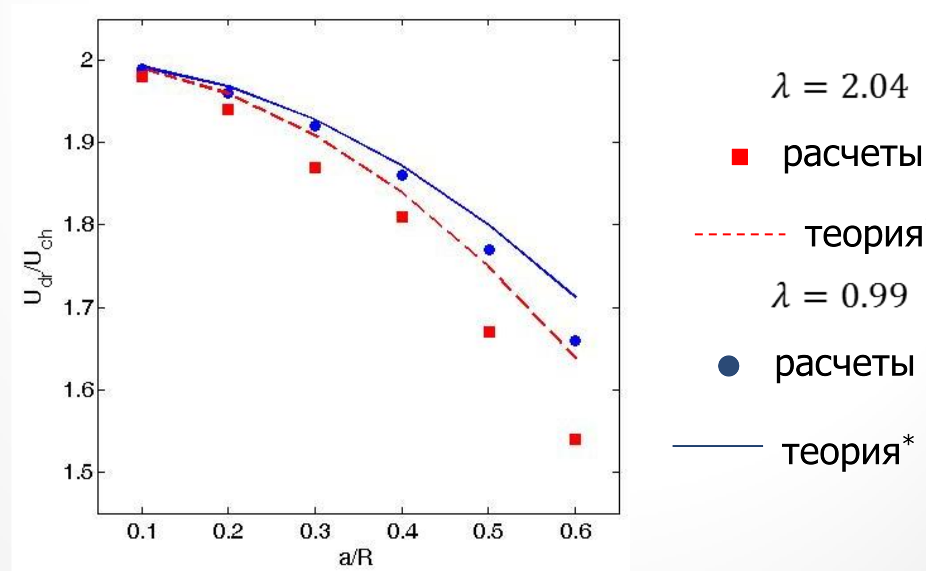
Сравнение с результатами экспериментов для капель в канале

Эксперимент[1] Сравнение Расчеты

1а
1б
2а
2б



$$\frac{U_{dr}}{U_{ch}} = 2 - \frac{4\lambda}{3\lambda+2}\cdot\left(\frac{a}{R}\right)^2 + o\left(\left(\frac{a}{R}\right)^3\right)$$



Параметры эксперимента

$\frac{a}{R} = 0.726$ $\quad a = 3.63\cdot 10^{-3}$м $\quad$ R$= 5\cdot 10^{-3}$м

$\rho_1 = \rho_2 = 1.089\cdot 10^3$ кг/м^3 $\quad \mu_1 = 0.425$ Па·с $\quad \gamma = 22\cdot 10^{-3}$ Н/м

1 а	1 б	2 а	2 б
$P = 0.437$ $Ca = 0.075$ $U = 3.9\cdot 10^{-3}$ м/с	$P = 0.589$ $Ca = 0.1$ $U = 5.25\cdot 10^{-3}$ м/с	$P = 0.437$ $Ca = 0.075$ $U = 3.9\cdot 10^{-3}$ м/с	$P = 0.589$ $Ca = 0.1$ $U = 5.25\cdot 10^{-3}$ м/с
$\lambda = 2.04$	$\mu_2 = 0.865$ Па·с	$\lambda = 0.19$	$\mu_2 = 0.08$ Па·с

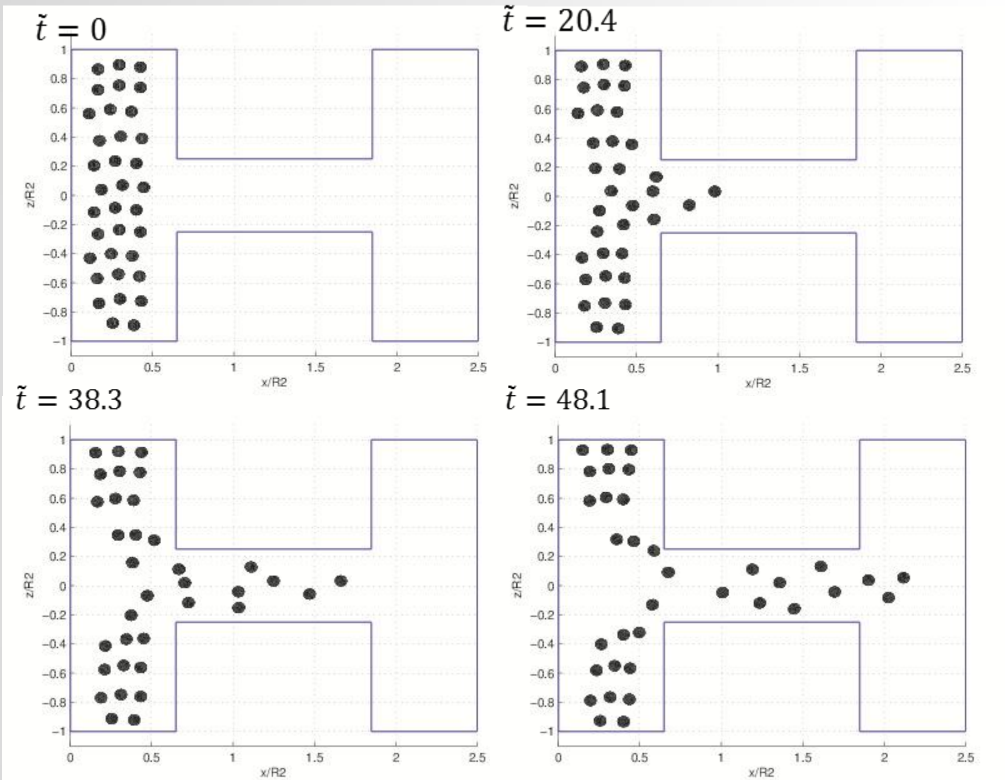
Сравнение относительной скорости капли $\frac{U_{dr}}{U_{ch}}$ в потоке

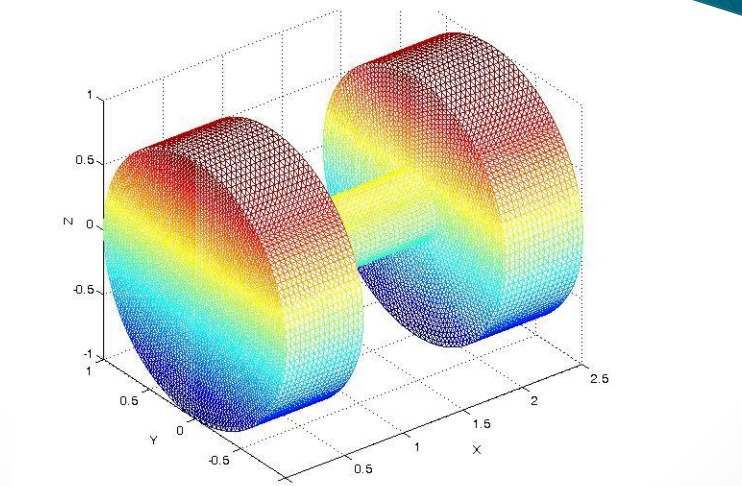
	Расчеты	Эксперимент	Погрешность
1а	1.43	1.46	2 %
1б	1.44	1.46	1.3 %
2а	1.514	1.56	2.9 %
2б	1.545	1.57	1.6 %

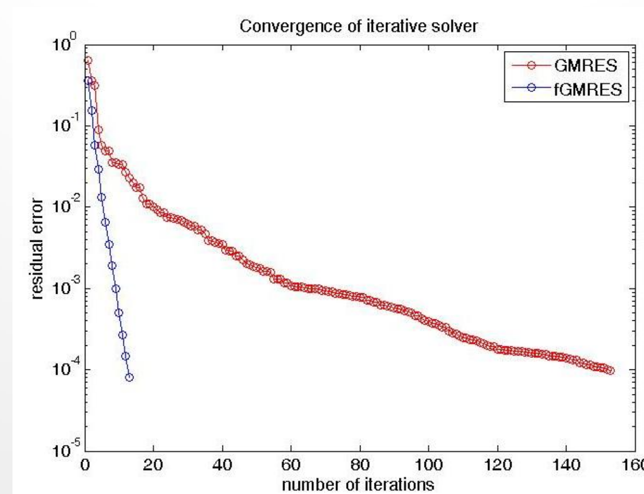
[1] *Ho B.P., Leal L.G.* The creeping motion of liquid drops through a circular tube of comparable diameter, 1975

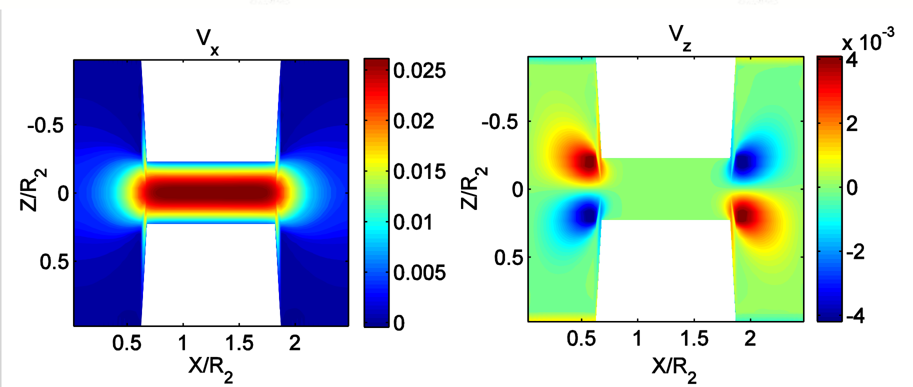
* *Hetsroni G., Habel S., Wacholder E.* The flow field in and around a droplet moving axially within a tube, 1970

Динамика деформируемых капель в канале переменного сечения





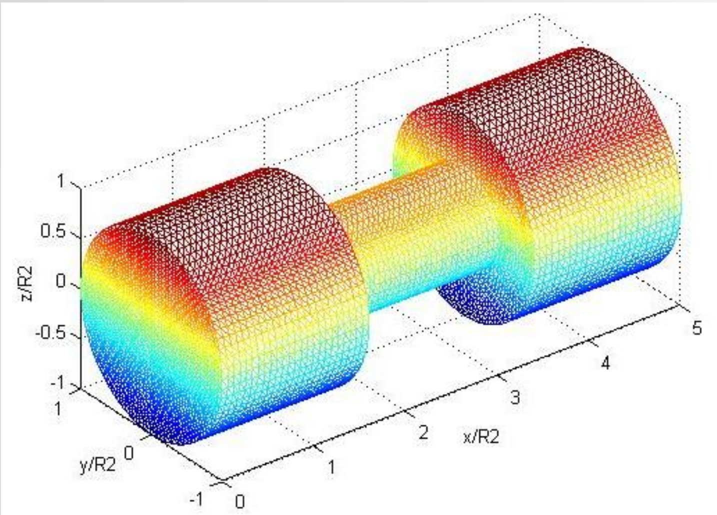


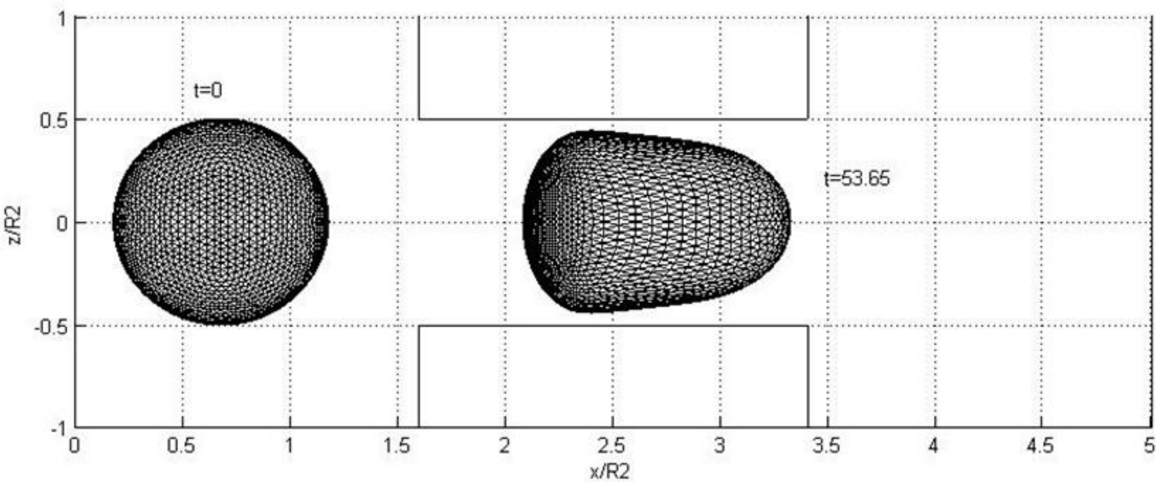


$$a/R_2 = 0.035,\ R_2/R_1 = 4, \lambda = 1.5, P = 0.14, L/R_2 = 2.5,$$

$$N_{\Delta_{drop}} = 320, N_{\Delta_{channel}} \approx 40\ 000$$

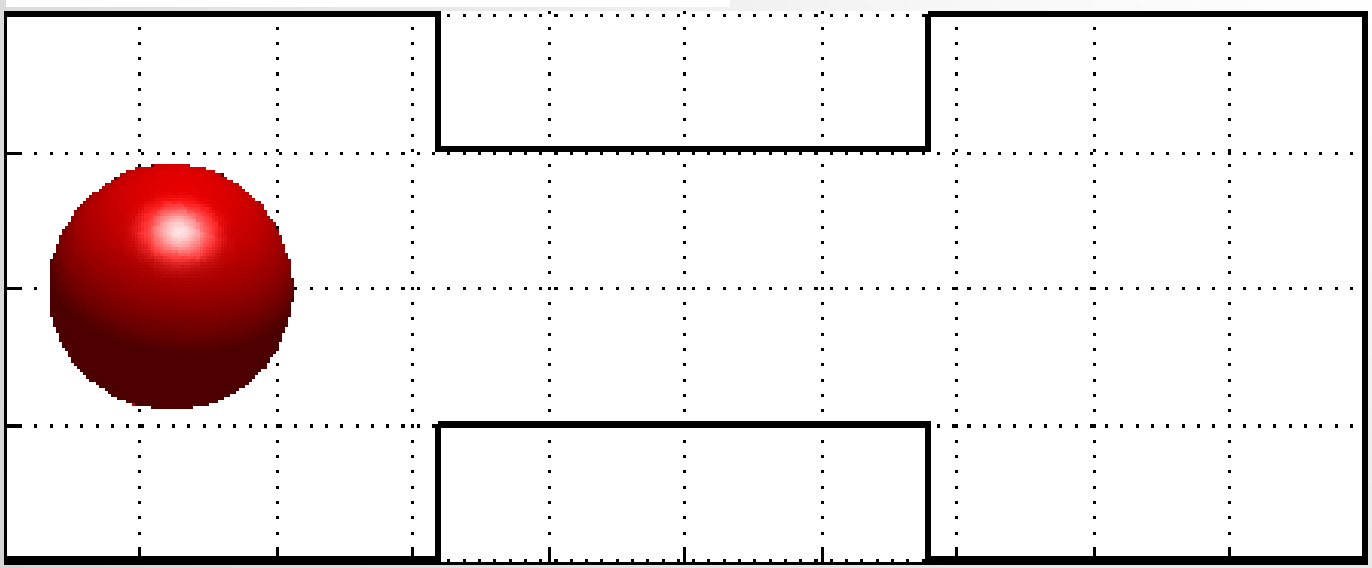
Динамика деформируемых капель в канале переменного сечения





$$a/R_1 = 1,\ R_2/R_1 = 2,$$

$$\lambda = 1.5, P = 0.5, L/R_2 = 5$$



$$a/R_1 = 0.9,\ R_2/R_1 = 2,$$

$$\lambda = 1.5, P = 0.45, L/R_2 = 5,$$

$$N_{\Delta_{drop}} = 5\,120,$$

$$N_{\Delta_{channel}} \approx 45\,000$$

Метод граничных элементов
Гранично-интегральная формулировка

Применение метода граничных элементов (МГЭ)[1] позволяет уменьшить размерность рассматриваемой задачи на единицу, поскольку все расчеты связаны только с границей.

Граничные интегральные уравнения для жидкости, занимающей объем *V*, ограниченный поверхностью *S*, могут быть записаны в следующем виде[*]

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\; dS(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} \in V,$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\; dS(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} \in S,$$

$$- \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu}\int_S \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})\; dS(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y} \notin S, V,$$

$$\mathrm{G}_{ij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3}\right), \quad \mathrm{T}_{ijk}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi}\frac{r_i r_j r_k}{r^5}, \quad r_i = y_i - x_i, \quad i, j, k = 1,2,3,$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$$

Stokeslet
(стокслет)

Stresslet
(стресслет)

[1] *Pozrikidis C.* Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow, 1992

[*]*Rallison J.M., Acrivos A.* A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow. 1978

МГЭ для капель в неограниченной области

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y}\in V_1,\quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}\in V_2,\quad \lambda\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})--\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}\in S,\frac{1+\lambda}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{y}) \end{array}\right\} = \int_S\left\{-\frac{1}{\mu}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-(1-\lambda)[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\right\}\mathrm{d}S(\boldsymbol{x}) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\boldsymbol{I}}{r}+\frac{\boldsymbol{rr}}{r^3}\right),\quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=-\frac{3}{4\pi}\frac{\boldsymbol{rrr}}{r^5},$$

$$\mu=\mu_1,\qquad \lambda=\mu_2/\mu_1,\qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x},\quad r=|\boldsymbol{r}|,$$

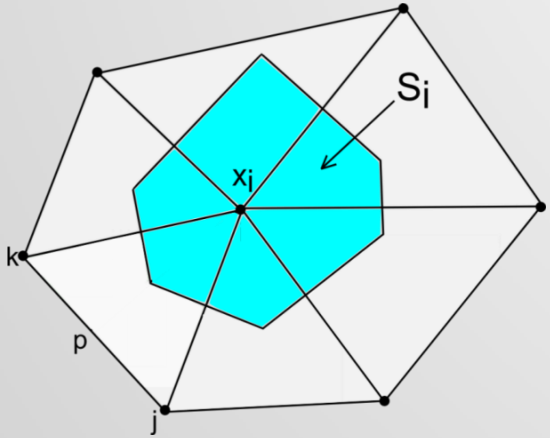
$$\int_S \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})\approx\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{I}_i^{(G)}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)$$

$$\int_S[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})\approx\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{I}_i^{(T)}(\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i)$$

$$\boldsymbol{I}_i^{(G)}(\boldsymbol{y})=\int_{S_i}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{I}_i^{(T)}(\boldsymbol{y})=\int_{S_i}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}S(\boldsymbol{x})$$

Сингулярные интегралы матриц рассчитывались на основе известных интегральных тождеств



$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1+\lambda}{2}\boldsymbol{I}_{ji}+(1-\lambda)\boldsymbol{I}_{ji}^{(T)}\right]\cdot\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_{\infty,j}-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{I}_{ji}^{(G)}\boldsymbol{f}_i,\quad j=1,\dots,N$$

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i),\boldsymbol{u}_{\infty,i}=\boldsymbol{u}_\infty(\boldsymbol{x}_i),\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i),\boldsymbol{I}_{ji}^{(G)}=\boldsymbol{I}_i^{(G)}(\boldsymbol{x}_j),\boldsymbol{I}_{ji}^{(T)}=\boldsymbol{I}_i^{(T)}(\boldsymbol{x}_j)$$

$$\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{C},(\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}_\infty+\boldsymbol{Bf})$$

Оценка погрешности

Оценка погрешности при расчете поля скоростей внутри и вне капли при обтекании ее внешним потоком

$\mathbf{v}_1$ $N = 162$

$\mathbf{v}_2$ $N = 642$

$\mathbf{v}_3$ $N = 2562$

Абсолютная погрешность

	V_x	V_z
$max\lvert\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\rvert$	0.0773	0.0849
$max\lvert\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\rvert$	0.0227	0.0112
Размытость	0.29	0.13

Относительная погрешность

	V_x	V_z
$max\lvert\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\rvert / max\lvert\mathbf{v}_1\rvert$	0.0988	0.1086
$max\lvert\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\rvert / max\lvert\mathbf{v}_2\rvert$	0.0291	0.0144
Размытость	0.29	0.13

Оценка погрешности при расчете поля скоростей в внутри канала переменного кругового сечения

$\mathbf{v}_1$ $N_\Delta = 21\,488$

$\mathbf{v}_2$ $N_\Delta = 34\,684$

$\mathbf{v}_3$ $N_\Delta = 54\,968$

Относительная погрешность

	V_x	V_y	V_z
$\dfrac{max\lvert\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\rvert}{max\lvert\mathbf{v}_1\rvert}$	0.0086	0.003	0.0072
$\dfrac{max\lvert\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\rvert}{max\lvert\mathbf{v}_2\rvert}$	0.007	0.0015	0.0051
Размытость	0.81	0.5	0.7

Абсолютная погрешность

	V_x	V_y	V_z
$max\lvert\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\rvert$	$0.4963 \cdot 10^{-4}$	$0.167 \cdot 10^{-4}$	$0.411 \cdot 10^{-4}$
$max\lvert\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\rvert$	$0.3935 \cdot 10^{-4}$	$0.085 \cdot 10^{-4}$	$0.293 \cdot 10^{-4}$
Размытость	0.79	0.5	0.7