



Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики

Parallel multi-criteria optimization algorithm for solving applied problems with multi-extreme black-box criteria

Сергей Коннов, Евгений Козин,
Константин Баркалов

`{evgeny.kozinov,konstantin.barkalov}@itmm.unn.ru`

- ❑ Многокритериальная оптимизация
- ❑ Сведение задач многокритериальной оптимизации к одномерным скалярным задачам глобального поиска
- ❑ Подход к поиску эффективных решений в задачах многокритериальной оптимизации
 - Пошаговое решение набора задач скалярной оптимизации
 - Повторное использование поисковой информации
- ❑ Параллельная модификация алгоритма
- ❑ Ускорение поиска с помощью методов машинного обучения
 - Оценка множества Парето с использованием разделяющей гиперплоскости
 - Оценка множества Парето с использованием нелинейных моделей машинного обучения
- ❑ Результаты вычислительных экспериментов
 - Подбор гиперпараметров алгоритма машинного обучения
 - Оптимизация параметров подвески колеса автомобиля

Задача многокритериальной оптимизации

- Задача многокритериальной оптимизации (МКО) может быть сформулирована следующим образом:

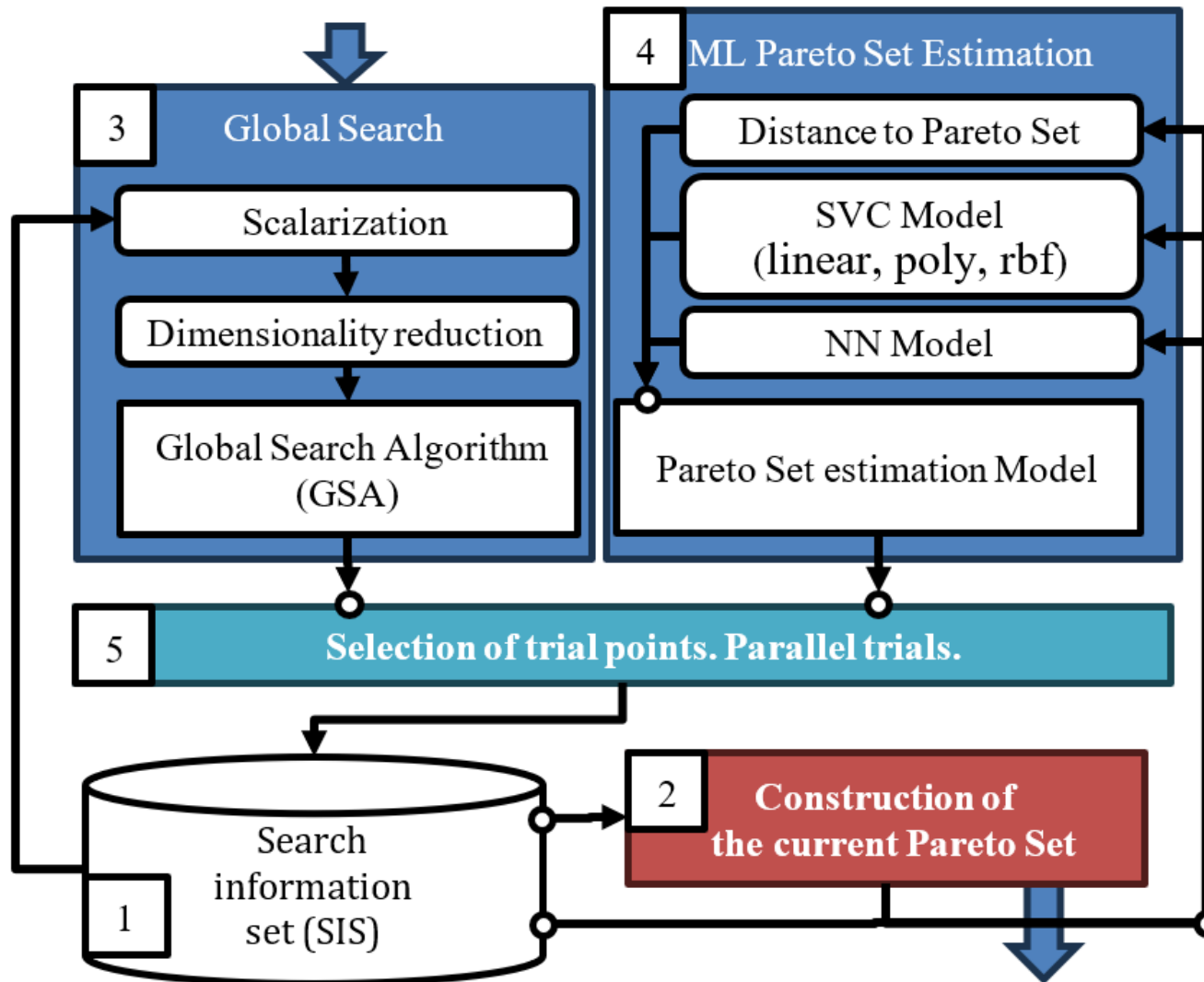
$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_s(y)) \rightarrow \min, \quad y \in D$$

- $f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_s(y))$ – критерии поиска,
- $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор варьируемых параметров,
- N – размерность решаемой задачи МКО,
- D – N -мерный гиперинтервал с областью поиска

$$D = \{y \in R^N: a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}.$$

- Критерии $f_i(y)$, $1 \leq i \leq s$, могут быть **многоэкстремальными, трудно оцениваемыми** и задаваться в виде «черного ящика».
- Критерии $f_i(y)$, $1 \leq i \leq s$, удовлетворяют условию Липшица
- $$|f_i(y') - f_i(y'')| \leq L_i \|y' - y''\|, y', y'' \in D, 1 \leq i \leq s.$$

Общая схема предлагаемого подхода



Скаляризация критериев

□ Для решения задач МКО можно применять скаляризацию критериев

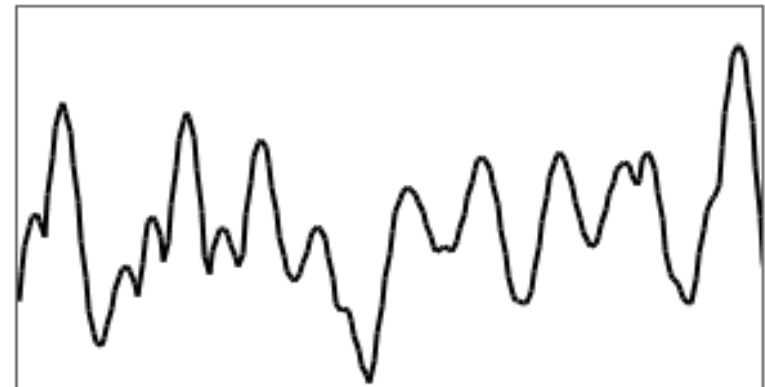
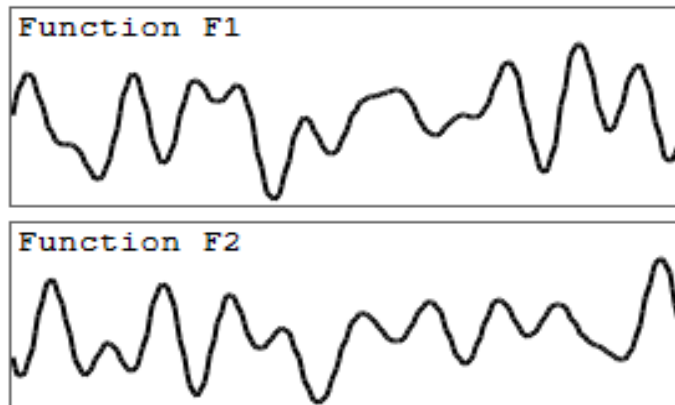
$$\min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{y \in D} F(\lambda, y),$$

- F – скалярный критерий,
- λ – вектор параметров метода скаляризации (соответствует важности критериев).

□ Возможный метод скаляризации:

$$\min_{y \in D} F(\lambda, y) = \min_{y \in D} \max_i \{\lambda_i (f_i(y) - f_i^*)\}$$

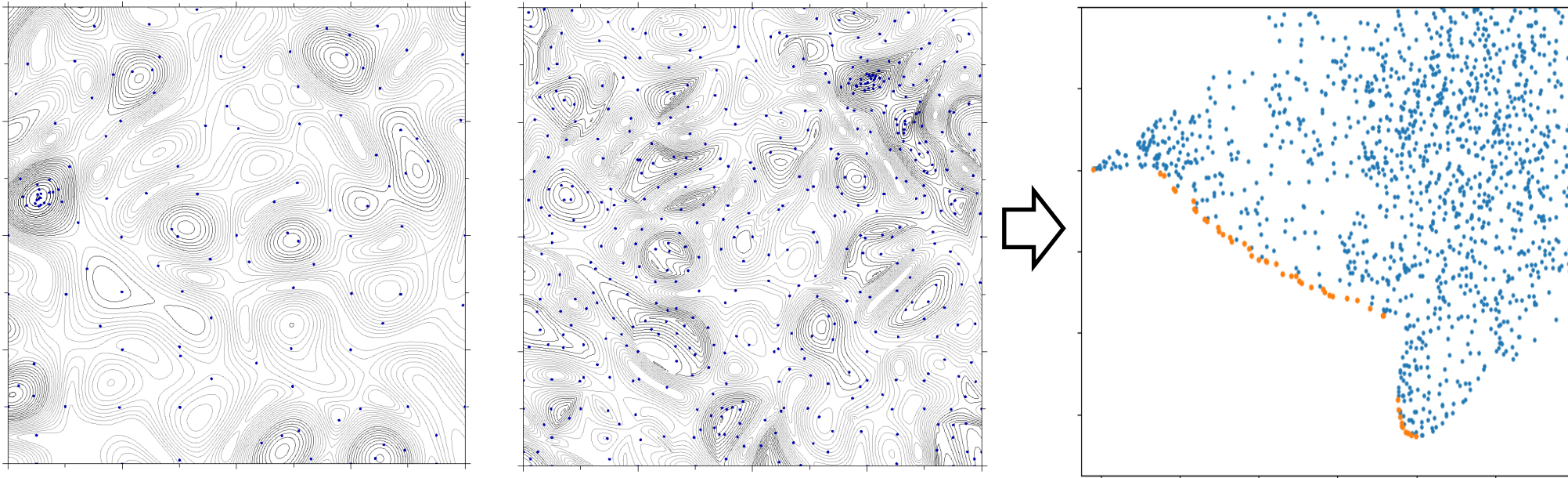
где f^* эталонное решение (может определяться в процессе поиска).



Скаляризация критериев

$$\varphi_1(y) = F(\lambda_1, f(y)) \quad \dots \quad \varphi_m(y) = F(\lambda_m, f(y))$$

Множество Парето



- Появляется серия скалярных задач глобальной оптимизации

$$\min_{y \in D} \varphi_1(y), \min_{y \in D} \varphi_2(y), \dots, \min_{y \in D} \varphi_m(y)$$

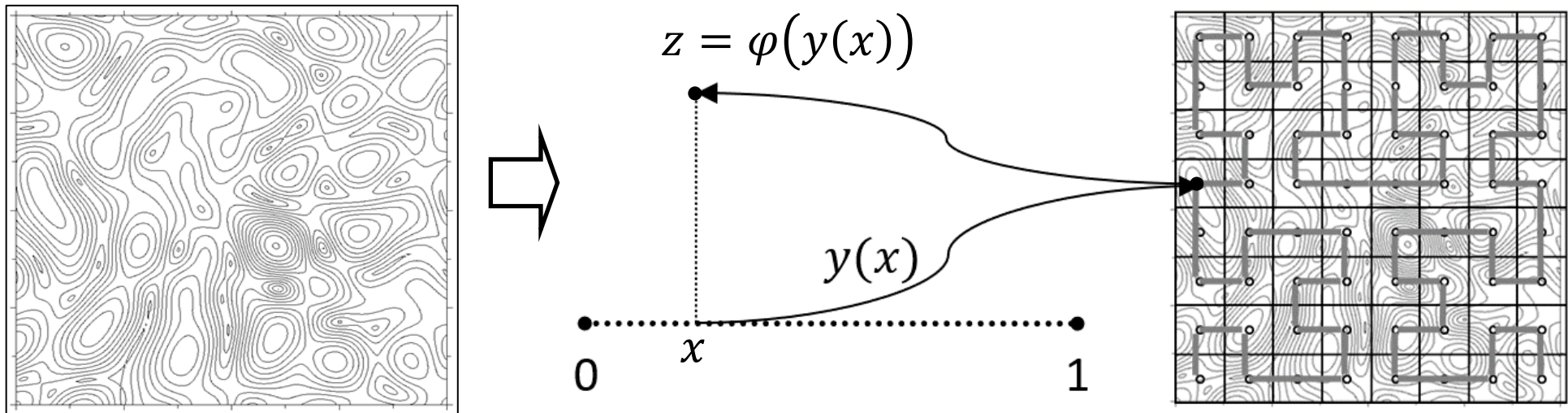
- Критерии $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(y') - \varphi(y'')| \leq L \|y' - y''\|, y', y'' \in D.$$

Уменьшение размерности

- Мы используем *кривые Пеано* $y(x)$, однозначно и непрерывно отображающие интервал $[0,1]$ на N -мерную область поиска D

$$\min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{x \in [0,1]} \varphi(y(x))$$



Алгоритм глобального поиска (АГП)

□ Испытание – вычисление значений вектор-функции $\varphi(y(x_i))$ в точке x_i .

□ Общая схема алгоритма поиска глобального минимума:

Первое испытание проводится в произвольной точке $x^1 \in (0,1)$. Далее:

1. Отсортировать точки испытаний в порядке возрастания их координат
 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_k < x_{k+1} = 1$.
2. Для каждого интервала (x_{i+1}, x_i) вычислить значение характеристики $R(i)$.

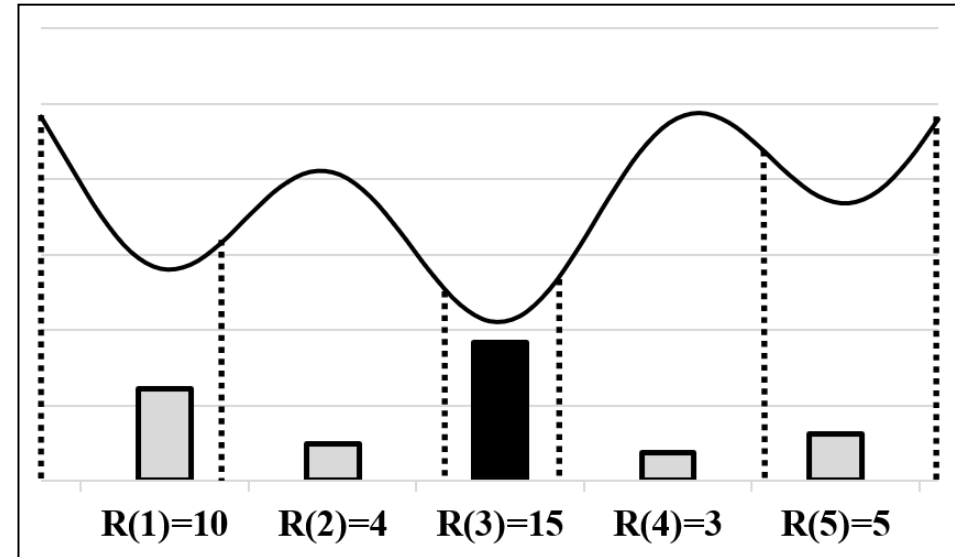
3. Определить интервал (x_{t-1}, x_t) ,
которому соответствует максимальная характеристика

$$R(t) = \max \{R(i): 1 \leq i \leq k+1\}.$$

4. Провести очередное испытание в точке интервала $x^{k+1} \in (x_{t-1}, x_t)$.

5. Условие остановки $\rho_t \leq \varepsilon$, где

$$\rho_j = \sqrt[N]{x_i - x_{i-1}}.$$



Алгоритм глобального поиска (АГП)

□ Характеристика интервала $R(i) = \Delta_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{r^2 \mu^2 \Delta_i} - 2 \frac{z_i + z_{i-1}}{r \mu}$

где $\mu = \max \left\{ \frac{|z_i - z_{i-1}|}{\Delta_i}, i = 1, \dots, k \right\}$ адаптивная оценка

константы Липшица L , $r > 1$ - параметр алгоритма.

□ Новая точка $x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \text{sign}(z_t - z_{t-1}) \frac{1}{2r} \left[\frac{|z_t - z_{t-1}|}{\mu} \right]^N$

Теория сходимости АГП изложена в работе Стронгина, Сергеева (2000).



Параллельный алгоритм глобального поиска (АГП)

□ Параллельный алгоритм:

1. Отсортировать точки испытаний в порядке возрастания их координат
 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{k*p} < x_{k*p+1} = 1.$
2. Для каждого интервала (x_{i-1}, x_i) вычислить характеристики интервалов $R(i)$.
3. Отсортировать интервалы по убыванию характеристик, взять p интервалов

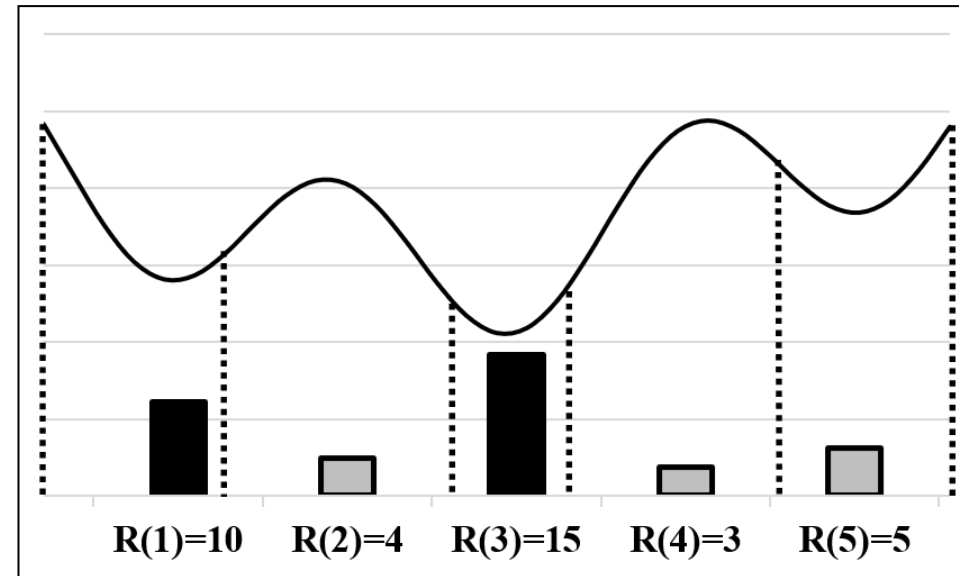
$$R(t_1) \geq R(t_2) \geq \dots \geq R(t_p).$$

4. Провести p испытаний параллельно

$$(x_{t_1-1}, x_{t_1}), (x_{t_2-1}, x_{t_2}), \dots, (x_{t_p-1}, x_{t_p}).$$

5. Критерий остановки:

$$\rho_{t_i} \leq \varepsilon, 1 \leq t_i \leq p.$$



Ускорение вычислений на основе повторного использования информации

- Численное решение задач глобальной оптимизации предполагает последовательное вычисление значений критериев $f(y)$ в точках y_i .
 - Полученные в результате вычислений данные образуют множество Ω поисковой информации.

$$\Omega = \{(y_i, f_i = f(y_i)): 1 \leq i \leq k\}.$$

- В результате скаляризации и снижения размерности множество Ω можно преобразовать к виду A

$$A = \{(x_i, z_i): 1 \leq i \leq k\},$$

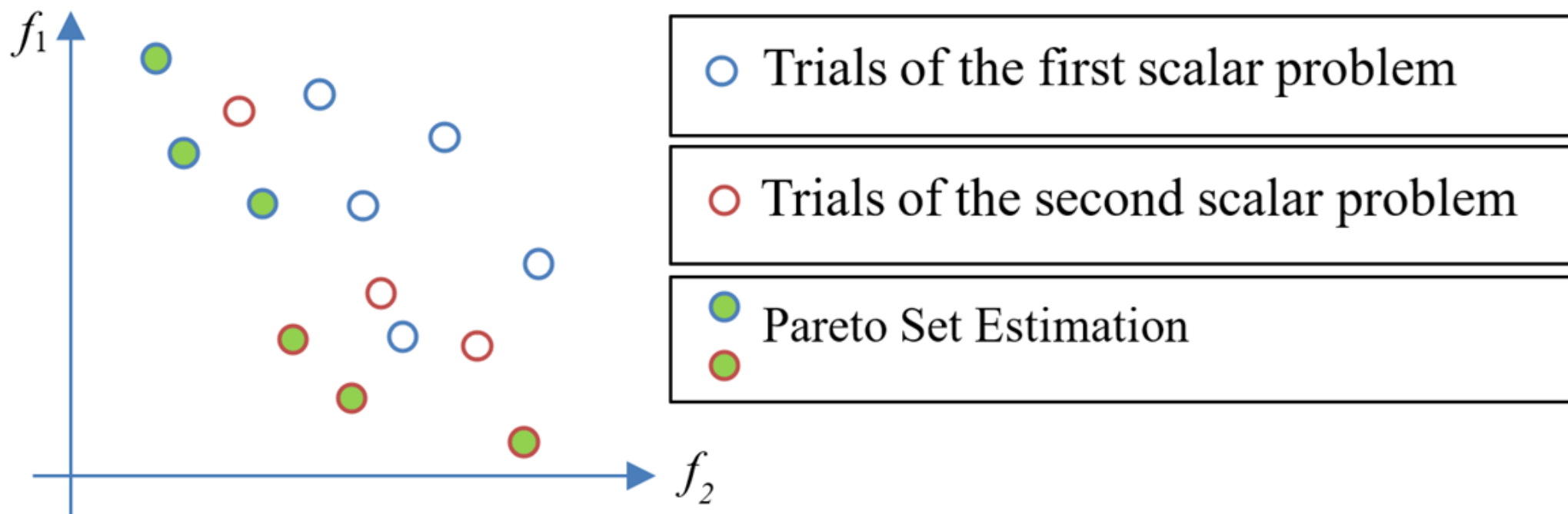
где $x_i \in [0,1]$, $z_i = F(\lambda, y(x_i))$.

- Информацию, накопленную во множестве Ω , можно использовать для нахождения минимума следующей задачи оптимизации $F(\lambda, y(x))$, т. е.

$$(y_i, f_i) \xrightarrow{\lambda} (x_i, z_i), 1 \leq i \leq k, \forall \lambda.$$

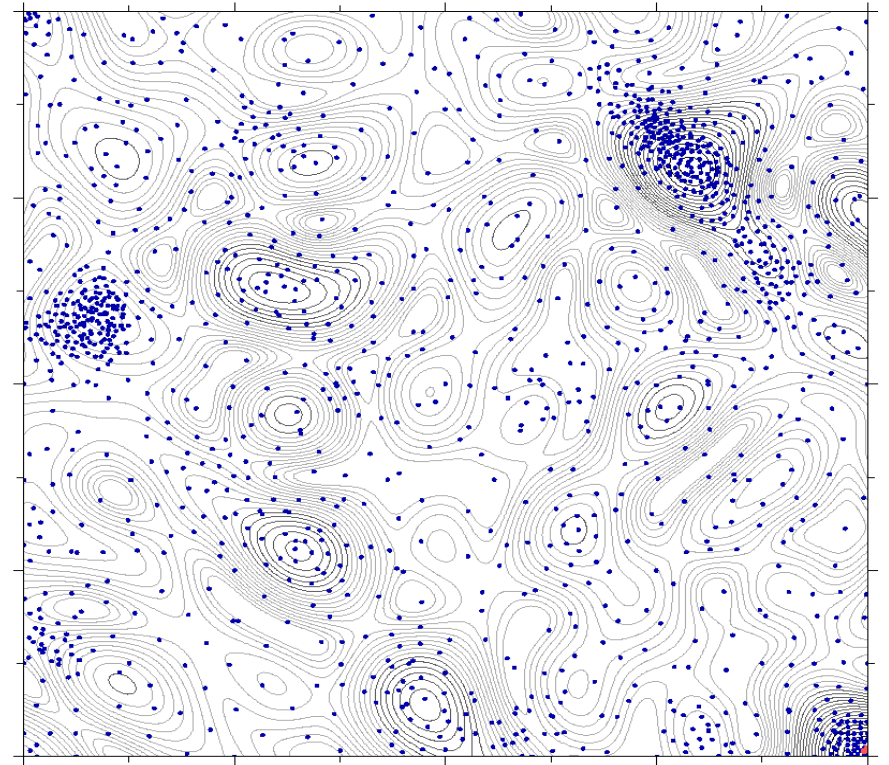
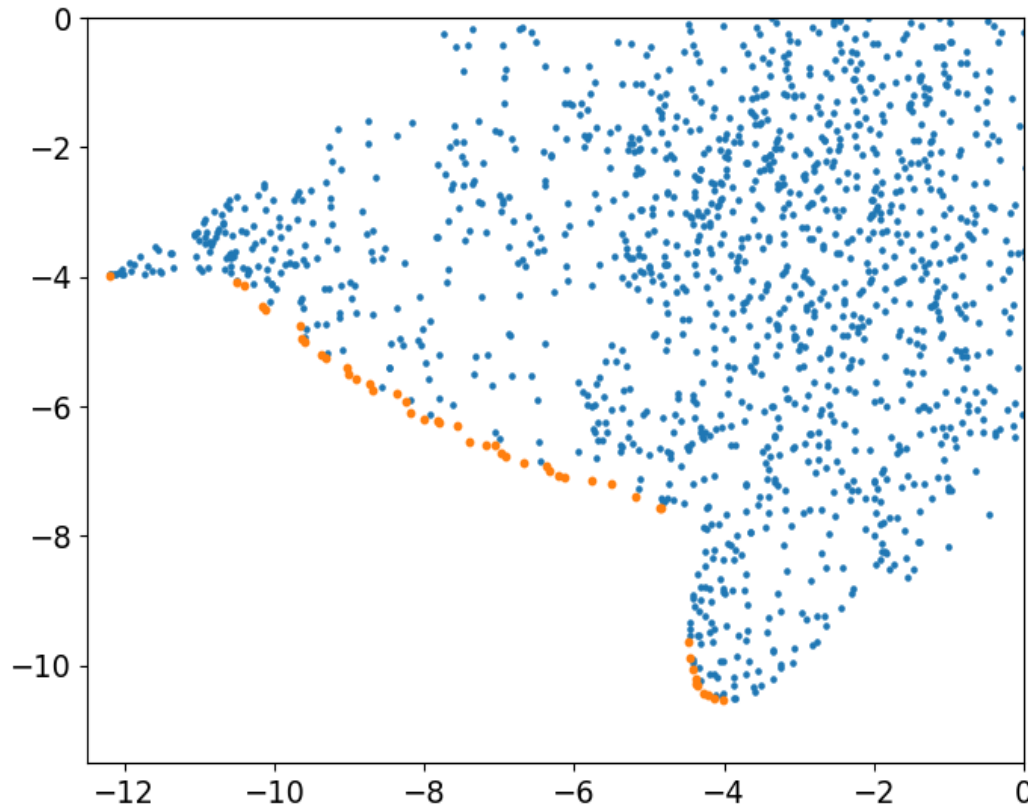
Оценка множества Парето

- ❑ Множество Парето с решением каждой новой скалярной задачи уточняется
 - На рисунке представлены значения в пространстве критериев



Ускорение поиска

- ❑ Существует множество подходов к ускорению решения скалярных задач.
- ❑ Нам нужен подход к ускорению решения многокритериальных задач.



Ускорение поиска

- ❑ Дальнейшее ускорение поиска может быть основано на применении методов машинного обучения.
- ❑ Предлагается следующий подход:
 1. Решить несколько скалярных задач с различными векторами λ , например, $\lambda_1 = (1,0)$, $\lambda_2 = (0.5, 0.5)$, $\lambda_3 = (0,1)$
 2. Построить оценку множества Парето.
 3. Добавить штраф за отклонение от построенной оценки множества Парето в правило выбора новой точки испытаний
 4. Решить i -ю скалярную задачу со следующим вектором λ_i
 5. Добавить точки, полученные при решении i -й задачи, в поисковую информацию и перейти к шагу 2.



Ускорение поиска с помощью методов машинного обучения

□ Пусть $R(i)$ — характеристика i -го интервала.

Предполагается, что эта характеристика состоит из двух частей:

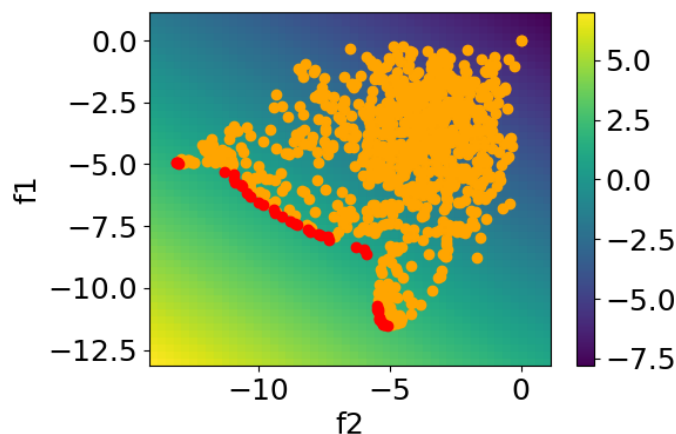
$$R(i) = R_{GS}(i) + \alpha R_{PS}(i)$$

- Часть $R_{GS}(i)$ ориентирована на поиск глобального минимума текущей скалярной задачи оптимизации.
- Часть $R_{PS}(i)$ влияет на выбор интервала для улучшения оценки множества Парето.

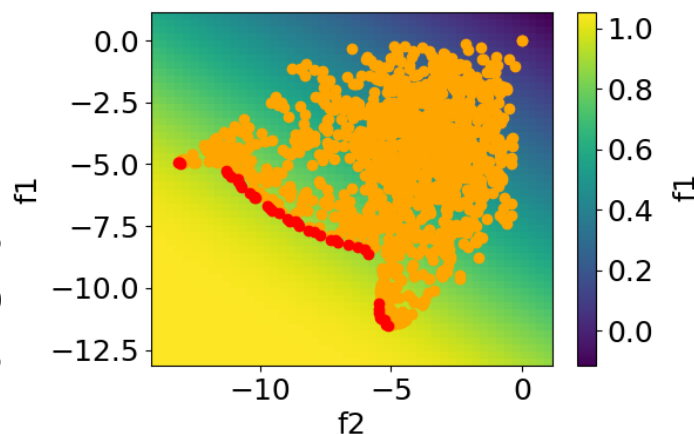
□ Возможны следующие подходы к вычислению члена $R_{PS}(i)$:

- на основе расстояния до гиперплоскости, разделяющей доминируемые и недоминируемые решения;
- на основе вероятностей принадлежности к доминируемым или недоминируемым решениям, полученных с использованием различных методов машинного обучения.

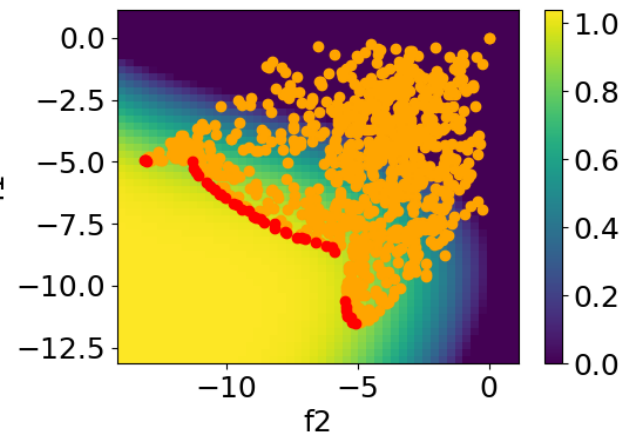
Ускорение поиска с помощью методов машинного обучения



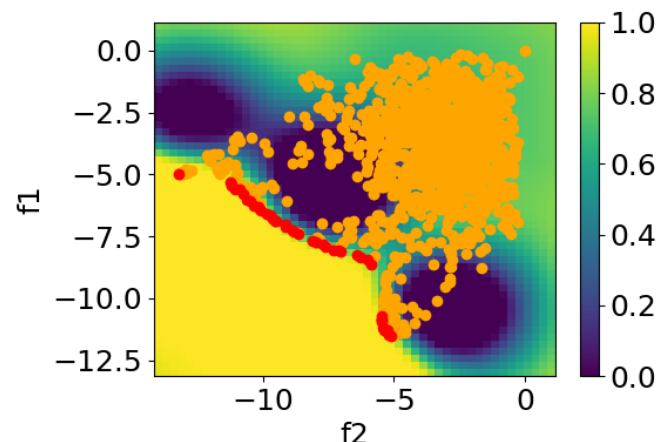
(a) MGSA SVC Dist (940 iter)



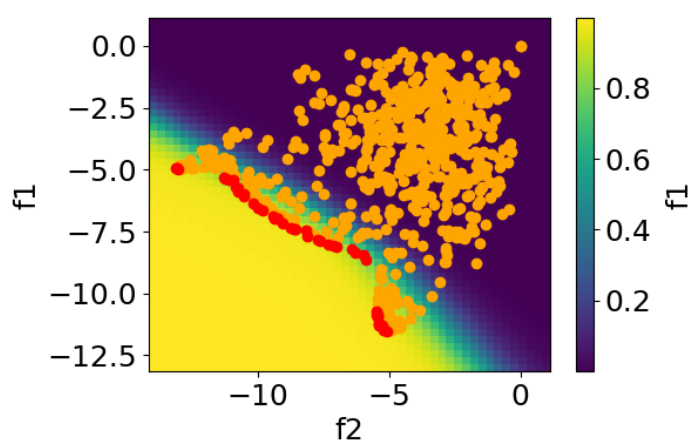
(b) MGSA SVC Linear (1327 iter)



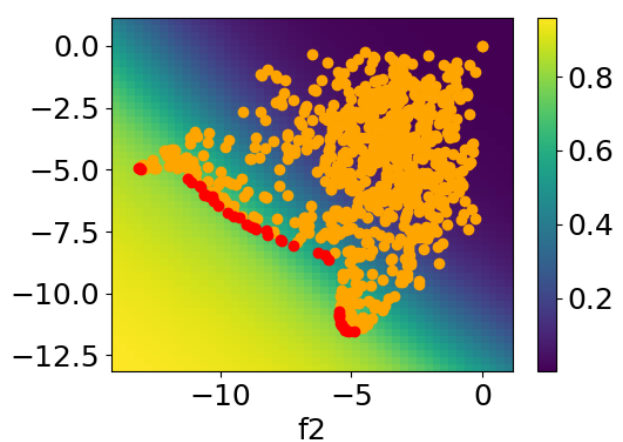
(c) MGSA SVC Poly (981 iter)



(d) MGSA SVC RBF (1283 iter)

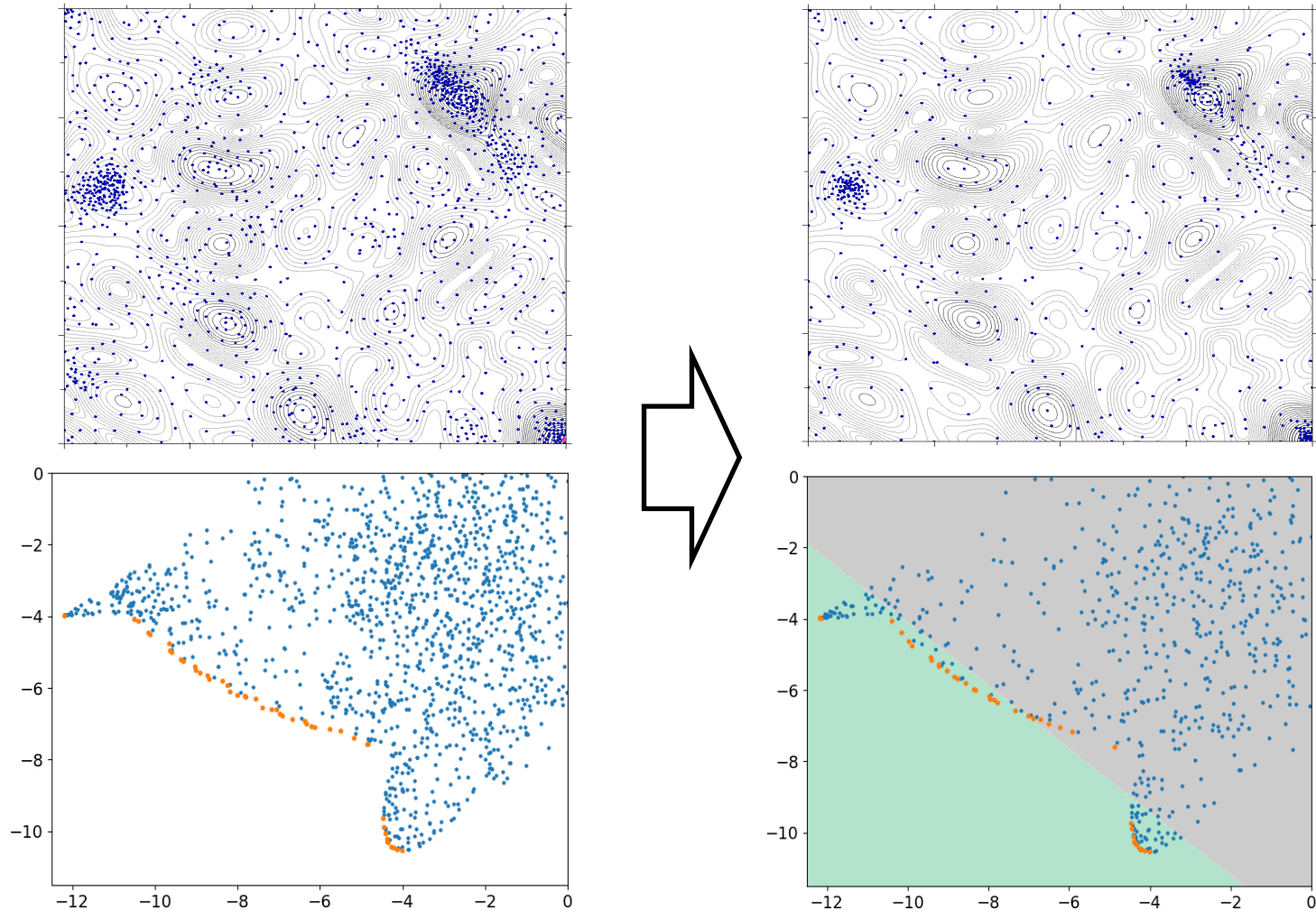


(e) MGSA NN 2 layers (683 iter)



(f) MGSA NN 1 layer (863 iter)

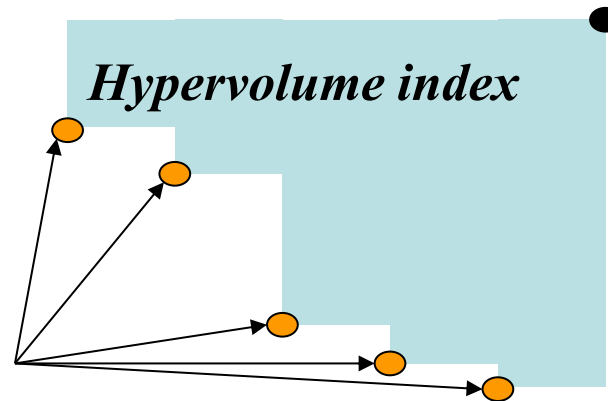
Эффект от использования методов машинного обучения



Метрика качества и сравниваемые алгоритмы

- ❑ Качество аппроксимации множества Парето оценивалось с помощью *hypervolume index* (HV; чем выше значение HV, тем лучше)

Оценка множества
Парето (PS)



❑ Алгоритмы MGSA

- базовый без использования моделей машинного обучения,
- модификации с применением моделей Linear SVC, Poly SVC, RBF SVC
- модификации с применением полносвязной нейронной сети

❑ Optuna

- *Akiba T. et al. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining. 2019. P. 2623-2631.

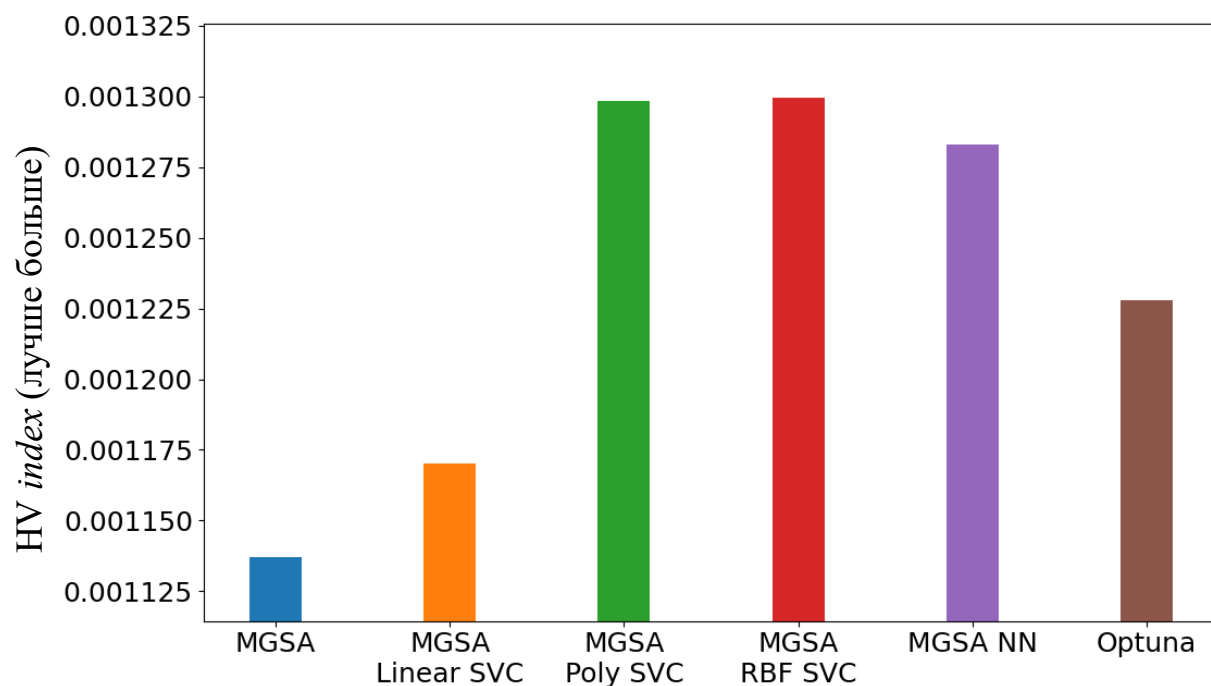
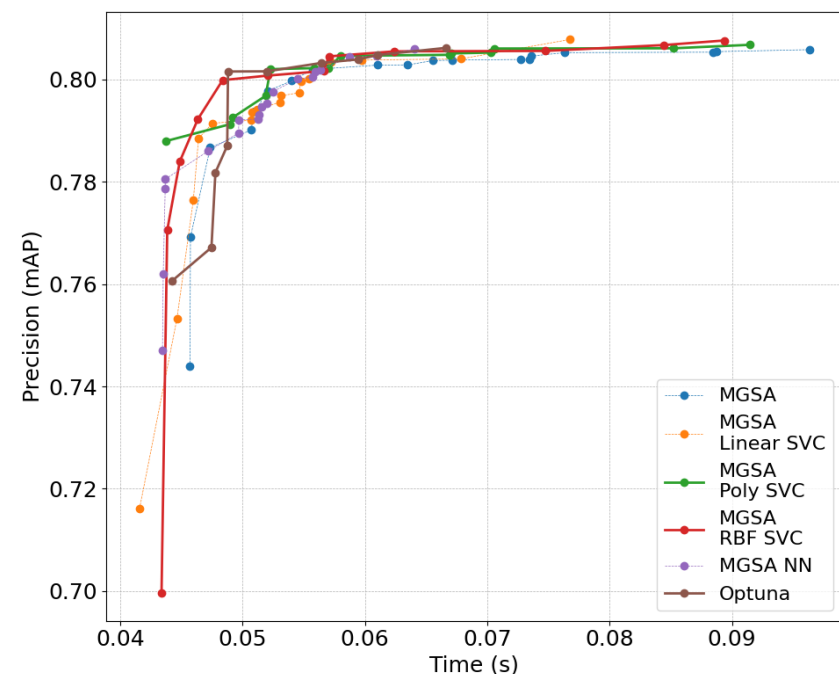
Подбор гиперпараметров алгоритма машинного обучения

- ❑ Задача настройки гиперпараметров модели машинного обучения рассматривается как задача многокритериальной оптимизации.
- ❑ **Модель машинного обучения**
 - XGBoost для многоклассовой классификации
 - Тестовый набор данных PASCAL VOC 2007
 - Общее количество изображений: 9 963
 - Обучающая выборка 5 011, Тестовая выборка 4 952 изображения
 - Количество аннотированных объектов: 24 640
 - Количество классов: 20
- ❑ **Оптимизируемые гиперпараметры**
 - Количество деревьев поиска
 - Глубина деревьев
- ❑ **Критерии качества**
 - Время алгоритма вывода (в секундах)
 - Качество предсказания (метрика mAP).



Подбор гиперпараметров алгоритма машинного обучения

- ❑ Для каждого алгоритма устанавливалось ограничение в 400 испытаний.
- ❑ Результаты вычислительных экспериментов



Оптимизация параметров подвески колеса автомобиля

- Динамика системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$m_s \frac{d^2 z_s}{dt^2} = -k_s(z_s - z_u) - c_s \left(\frac{dz_s}{dt} - \frac{dz_u}{dt} \right)$$

$$m_u \frac{d^2 z_u}{dt^2} = k_s(z_s - z_u) + c_s \left(\frac{dz_s}{dt} - \frac{dz_u}{dt} \right) - k_t(z_u - z_r)$$

- Критерии эффективности

- **Критерий комфорта**
среднеквадратичное значение ускорения кузова

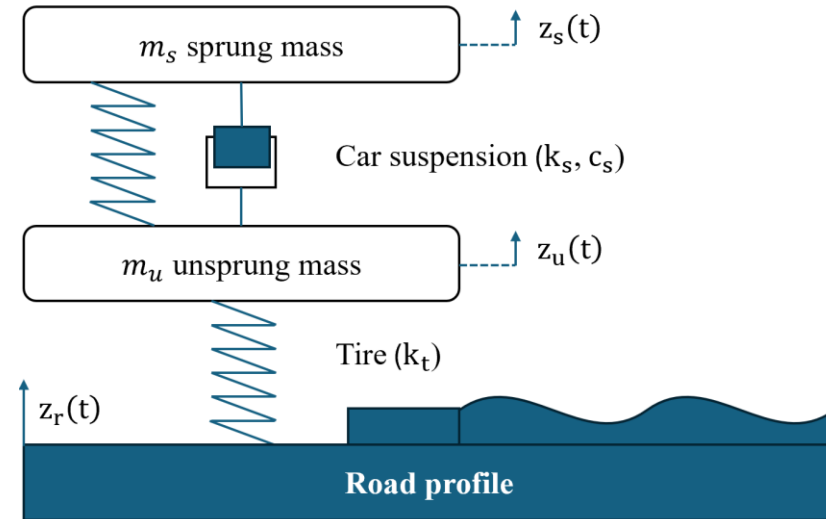
$$f_1(y) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{d^2 z_s(t)}{dt^2} \right)^2 dt}$$

- **Критерий дорожного контакта**
среднеквадратичное значение деформации шины

$$f_2(y) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (z_u(t) - z_r(t))^2 dt}$$

- **Критерий хода подвески**
относительное перемещение поддрессоренной и неподдрессоренной масс

$$f_3(y) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (z_s(t) - z_u(t))^2 dt}$$



* Gobbi, M., Mastinu, G. Analytical description and optimization of the dynamic behaviour of passively suspended road vehicles // Journal of Sound and Vibration, 245(3), 457–481. 2001.

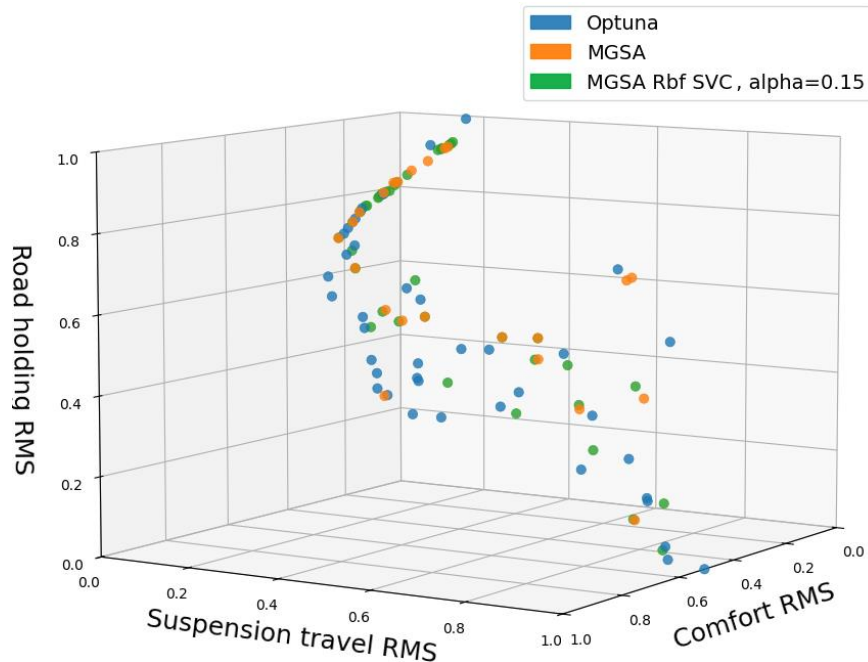
Оптимизация параметров подвески колеса автомобиля

- ❑ Моделирование динамики системы на временном интервале $T = 4$ с.
 - Метод интегрирования RK45, из SciPy.
- ❑ Внешнее воздействие – комбинированный профиль дороги:
 - Одиночная неровность высота 0,05 м, $t_0 = 0,5$ с длительность 0,18 с.
 - На интервале времени от $t_1 = 1,5$ с. до $t_2 = 3,5$ с. участок периодических возмущений – sin сигнал:
 - амплитуда 0,008 м, частота 7 Гц.
- ❑ Допустимая область поиска для задачи

Параметр	Min	max	Единица измерения
Жёсткость подвески k_s	10 000	40 000	Н/м
Коэффициент вязкого демпфирования подвески c_s	500	4 500	Н · с/м
Жёсткость шины k_t	120 000	260 000	Н/м

Оптимизация параметров подвески колеса автомобиля

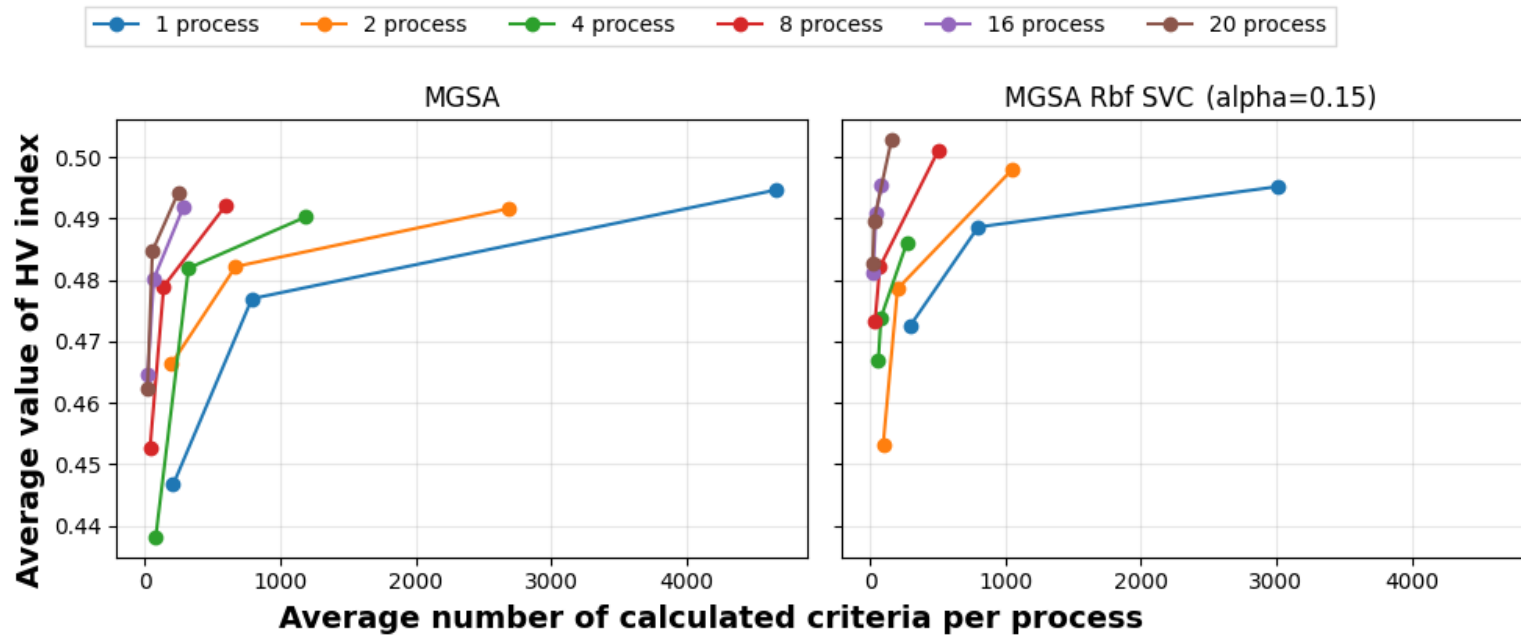
❑ Число испытаний фиксировано равным 200



HV index	
Optuna	0.447
MGSA	0.4428
MGSA_Rbf_SCV	0.4582

Оптимизация параметров подвески колеса автомобиля

❑ Масштабируемость алгоритма



Number of processes	MGSA			MGSA_RBF_SVC		
	Iterations	HV	Speedup	Iterations	HV	Speedup
1	4659	0.4946	1.0	3017	0.4952	1.0
2	2684	0.4916	1.7	1050	0.4979	2.8
4	1188	0.4903	3.9	272	0.4859	11.1
8	597	0.4921	7.8	507	0.5011	5.9
16	282	0.4917	16.5	86	0.4954	35.2
20	244	0.4941	19.1	161	0.5029	18.7



Спасибо за внимание

Евгений Козин

evgeny.kozinov@itmm.unn.ru

Константин Баркалов

konstantin.barkalov@itmm.unn.ru

The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education
of the Russian Federation, agreement No 075-02-2026-1346.

