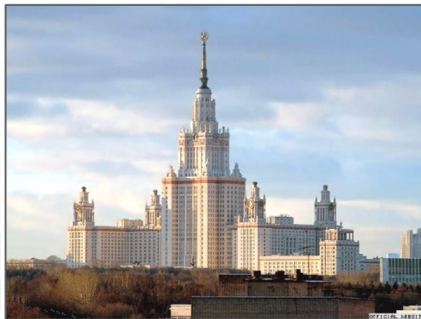




Low-Frequency Ultrasound Tomography in Vector Elastic Models for Nondestructive Testing

А.В.Гончарский, С.Ю.Романов, С.Ю.Серёжников(докладчик)

Низкочастотная ультразвуковая томография в векторной постановке

1 Применение

2 Постановка задачи

- Уравнение динамической теории упругости
- Схема эксперимента
- Градиентный метод
- Сопряжённая задача

3 Численный метод

- Разностная аппроксимация
- Градиенты
- Распараллеливание вычислений
- Производительность и масштабируемость

4 Модельные расчёты

- Моделирование распространения волн
- Определение параметров Ламэ λ , μ , ρ
- Определение скоростей волн
- Тест разрешающей способности

5 Расчёты с начальным приближением

- Определение параметров Ламэ λ , μ , ρ
- Определение скоростей волн

6 Выводы

Геофизика и сейсморазведка

Размер области 10 длин волн

Ограниченное кол-во источников и детекторов, размещённых на поверхности и в скважинах.

Горные породы

Неразрушающий контроль

Размер области 50+ длин волн

Композитные материалы, металлы

100+ источников

► Какие параметры материалов можно определить в лучшем случае в формате неразрушающего контроля методом волновой томографии?

Постановка задачи

Уравнение динамической теории упругости

Уравнение упругости относительно вектора смещений частиц имеет вид:

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \{u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x})\}$ – вектор смещения частиц,

$\rho(\mathbf{x})$ – массовая плотность среды,

$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ – вектор силы источника возмущений в точке $\mathbf{q}$. $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q})\mathbf{g}(t)$

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))$ – тензор напряжений 2×2 , операция div применяется по строкам тензора,

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 2\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) + \lambda(\mathbf{x})\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \mathbf{I}$,

где $\mu(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициенты Ламэ, $\mathbf{I}$ – единичная матрица 2×2 .

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & 0.5(u_y + v_x) \\ 0.5(v_x + u_y) & v_y \end{bmatrix}$$

► Уравнение для ρ, λ, μ принимает вид:

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div} (\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x})\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Постановка задачи

Схема эксперимента

► Задача – определить коэффициенты уравнения в области G

$$\rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$
$$\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{u}_t|_{t=0} = 0 \quad (\text{или начальные/граничные условия}), \quad \mathbf{f}|_G = 0.$$

Для $s \in S$: $\mathbf{u}(t, s; q_j; \mu, \lambda, \rho) = \mathbf{U}(t, s; q_j)$ — данные на детекторах.

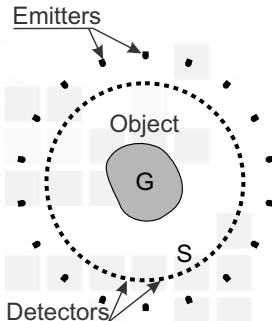
Источники расположены в точках $\mathbf{q}_j, j = 1 \dots M$

► Приближённое решение – минимум функционала невязки

$$\Phi(\mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \int_0^T \int_S (\mathbf{u}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho) - \mathbf{U}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j))^2 d\mathbf{s} dt.$$

Набор коэффициентов, при котором функционал достигает минимума, принимается за приближённое решение обратной задачи.

$$(\bar{\mu}(\mathbf{x}), \bar{\lambda}(\mathbf{x}), \bar{\rho}(\mathbf{x})) : \min_{\mu, \lambda, \rho} \Phi(\mu, \lambda, \rho) = \Phi(\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\rho}).$$



Постановка задачи

Градиентный метод

► Градиенты функционала невязки можно вычислить в явном виде

$$\Phi_{\mu}(\mathbf{x}; \mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \int_0^T \varepsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) : \varepsilon(\mathbf{w}_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) dt,$$

$$\Phi_{\lambda}(\mathbf{x}; \mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \int_0^T \operatorname{div}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) \cdot \operatorname{div}(\mathbf{w}_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) dt,$$

$$\Phi_{\rho}(\mathbf{x}; \mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \int_0^T (u_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho), \mathbf{w}_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) dt,$$

где $\mathbf{w}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)$ — решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{w}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{w}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) = \\ = \mathbf{u}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho) - \mathbf{U}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j); \quad \mathbf{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{w}_t|_{t=T} = 0. \end{aligned}$$

Постановка задачи

Сопряжённая задача

► Прямая и сопряжённая задачи

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{w}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{w}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{u}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho) - \mathbf{U}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j);$$

$$\mathbf{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{w}_t|_{t=T} = 0.$$

► Метод обратного распространения невязки

- В качестве источника в сопряжённой задаче выступает разность измеренного и рассчитанного волнового поля.
- Разностный сигнал распространяется в обратном времени от детекторов к объекту.
- Отличия параметров модели от измеренного объекта являются источниками разностного сигнала, которые можно найти.

Численный метод

Разностная аппроксимация

► Аппроксимация частных производных

$$u_x = u \otimes [1, -8, 0, 8, -1]/(12 \, dx), \quad \text{где } \otimes - \text{свёртка}$$

$$u_{xx} = u \otimes [-1, 16, -30, 16, -1]/(12 \, dx^2), \quad u_{xy} = (u_x)_y$$

► Расчёт конечно-разностным методом последовательно по времени

$$\begin{aligned} u_{(t+1)} &= \frac{dt^2}{\rho} (\kappa u_{xx} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) + \kappa_y u_x + \mu_y(u_y + v_x) + \lambda v_{yx} + \lambda_y v_y) + \\ &\quad + 2u_{(t)} - u_{(t-1)} + f^{(x)}; \\ v_{(t+1)} &= \frac{dt^2}{\rho} (\kappa v_{yy} + \mu(v_{xx} + u_{yx}) + \kappa_x v_y + \mu_x(v_x + u_y) + \lambda u_{xy} + \lambda_x u_x) + \\ &\quad + 2v_{(t)} - v_{(t-1)} + f^{(y)}; \quad \mathbf{f} = \{f^{(x)}, f^{(y)}\}, \quad \mathbf{u} = \{u, v\}, \kappa = \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

Разностная схема требует хранения двух слоёв по времени $u_{(t-1)}$ и $u_{(t)}$, затем $u_{(t+1)}$ замещает $u_{(t-1)}$.

Численный метод

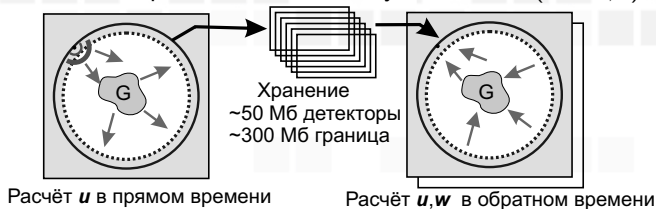
Градиенты

► Градиенты вычисляются по разностным формулам

$$\Phi_{\mu} = \sum_t u_x w_x + v_y z_y + \frac{1}{2}(u_y + v_x)(w_y + z_x); \quad \Phi_{\lambda} = \sum_t (u_x + v_y)(w_x + z_y);$$
$$\Phi_{\rho} = \sum_t (u_t w_t + v_t z_t), \quad u_t = (u_{(t+1)} - u_{(t)})/dt. \quad \mathbf{u} = \{u, v\}, \quad \mathbf{w} = \{w, z\}$$

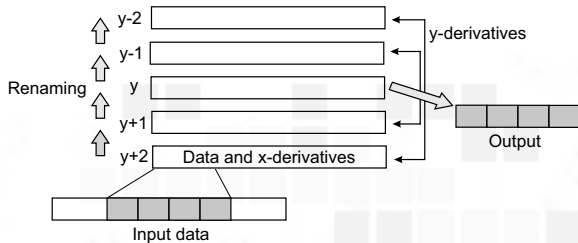
► Расчёт градиентов проводится в обратном времени

Поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ запоминается на границе S : $W(\mathbf{s}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{s} \in S, t)$, затем рассчитывается в обратном времени вместе с сопряжённой волной и условиями $\mathbf{u}(\mathbf{s} \in S, t) = W(\mathbf{s}, t)$.

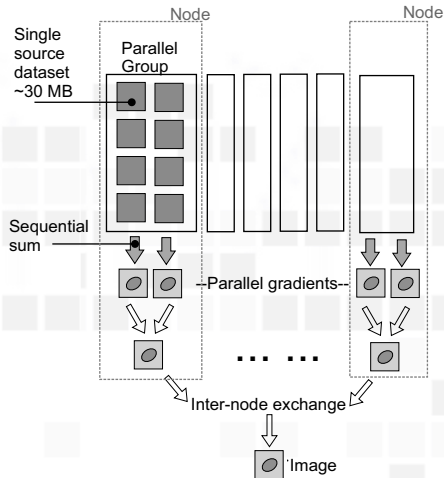


Численный метод

Распараллеливание вычислений

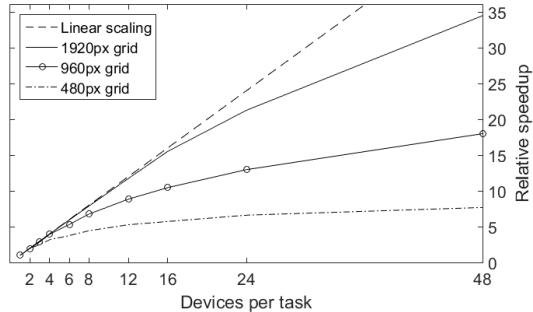
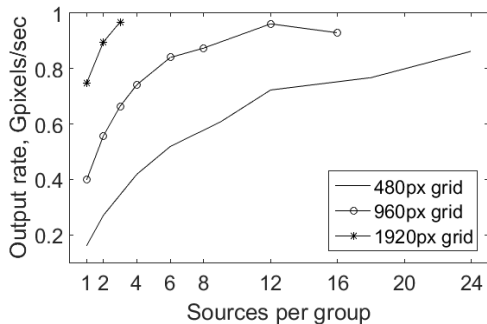


- Y-marching метод
- Размер сетки – 960×960
- Шагов по времени – 6400
- Объём данных – 5 Гб / узел
- Время – 2...3 GPU-часа (25...35 итераций)



Численный метод

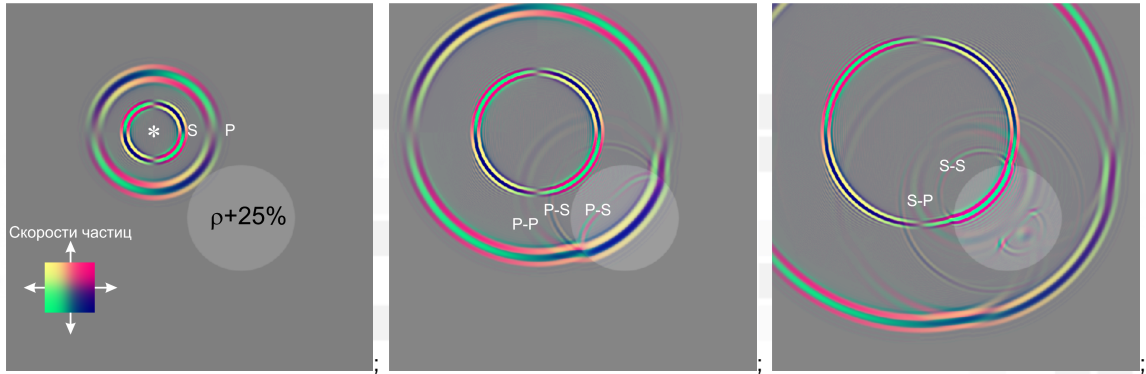
Производительность и масштабируемость



► Задача масштабируется практически линейно при условии достаточной загрузки GPU

Модельные расчёты

Моделирование распространения волн



► Преломление, отражение и преобразование типов волн

- Продольная волна (P) – 1.5 мм, 6.4 мм/мкс; поперечная волна (S) – 0.68 мм, 2.9 мм/мкс

Модельные расчёты

Определение параметров Ламэ λ , μ , ρ

► Восстановление трёх независимых коэффициентов

$\rho = 2700 \text{ г/см}^3$ (алюминий)

$\mu = 25.95 \text{ ГПа} \pm 5\%$

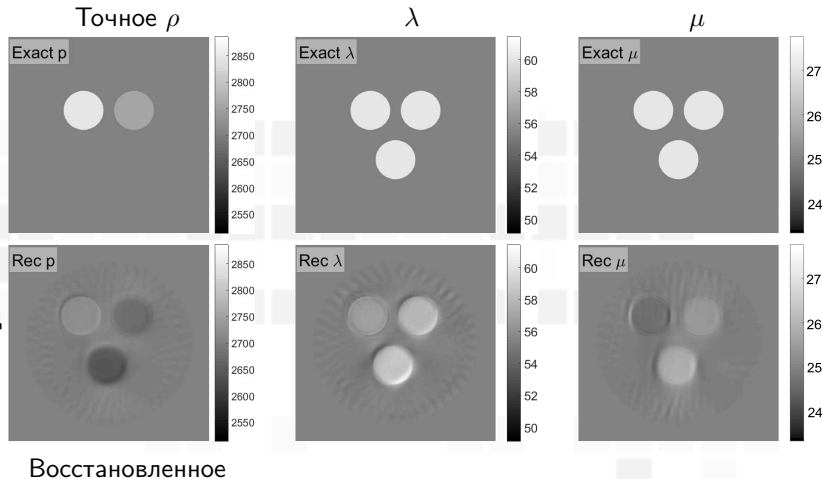
$\lambda = 55.27 \text{ ГПа} \pm 5\%$

Размер области – 30 мм

Центральная частота – 5 МГц

Число излучателей – 48

- Значения недостоверны в такой постановке

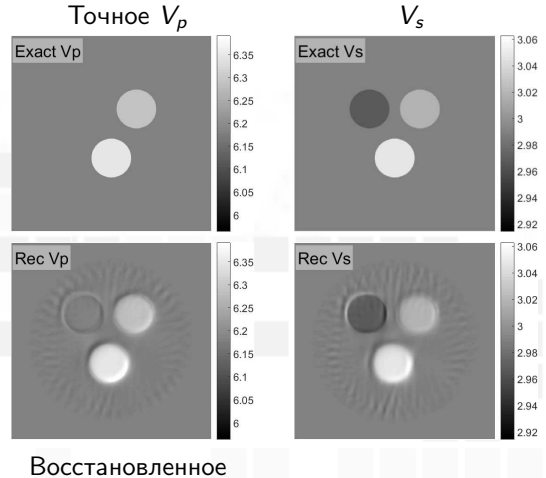


► Восстановление скоростей волн

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$$
$$V_s = \sqrt{\mu/\rho}$$

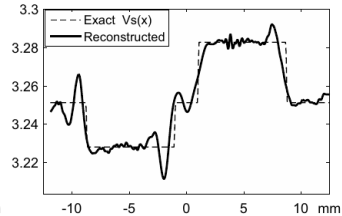
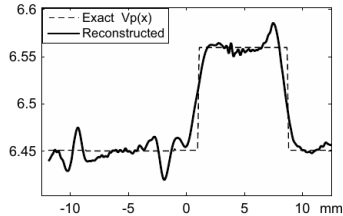
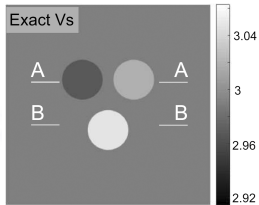
- Значения скоростей близки к точным

Несмотря на то, что значения отдельных восстановленных коэффициентов недостоверны, скорости волн восстанавливаются с высокой точностью

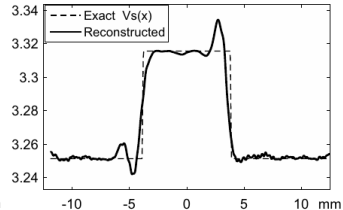
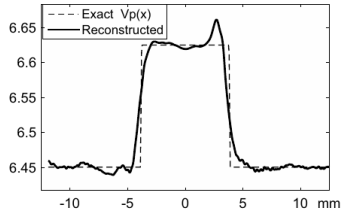
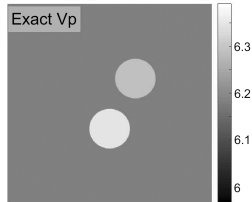


Модельные расчёты

Тест разрешающей способности



A-A



B-B

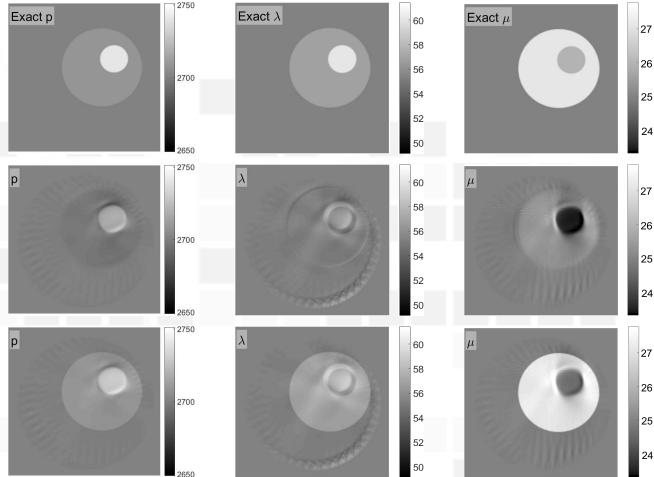
Расчёты с начальным приближением

Определение параметров Ламэ λ , μ , ρ

► Восстановление трёх независимых коэффициентов с начальным приближением

- Точное изображение
- Нулевое начальное приближение
- Начальное приближение – круг

Восстановленные значения всех трёх коэффициентов зависят от начального приближения. Три коэффициента не определяются в такой постановке



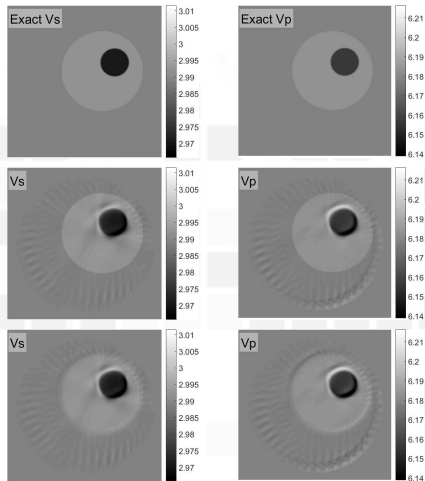
Расчёты с начальным приближением

Определение скоростей волн

► Восстановление скоростей волн с начальным приближением

- Точное изображение
- Нулевое начальное приближение
- Начальное приближение – круг

Восстановленные значения скоростей близки к точным и не зависят от начального приближения



Выводы

- Метод волновой томографии позволяет устойчиво восстановить скорости распространения продольной и поперечной волн.
- Восстановление трёх коэффициентов как независимых в рассмотренной схеме неоднозначно и зависит от начального приближения. Для определения свойств материала нужно использовать дополнительное условие, связывающее два параметра.
- Для получения качественного изображения необходимо использовать несколько десятков источников и несколько сотен детекторов. Детекторы регистрируют вектор смещения.
- Метод имеет высокую вычислительную сложность. Время расчёта пропорционально кол-ву источников и размеру области в кубе.

Работа поддержана грантом РФФИ №25-11-00089.

Наш сайт <http://inverseproblems.ru>



Спасибо за внимание!