



O.S. Yazovtseva



R. Uzyanbaev, Yu. Poveshchenko, V. Podryga, I. Yanglyayev, I. Gubaydullin

**A parallel algorithm for solving the
piezoconductivity equation in a decomposed
macrocell with an unknown mortar boundary of a
fractured-porous reservoir**

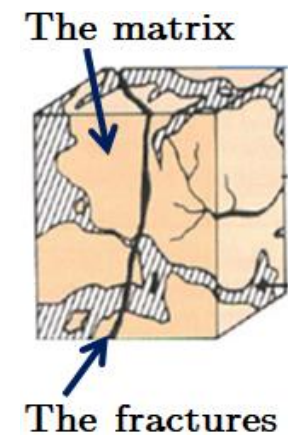
*Ufa State Petroleum Technological University

The work was supported by the Russian Science Foundation (project № 25-71-20005)

Актуальность

- Значительная часть нефти сосредоточена в карбонатных коллекторах
- Существенные вычислительные мощности
- Необходимость учета нерегулярных кустовых включений скважин

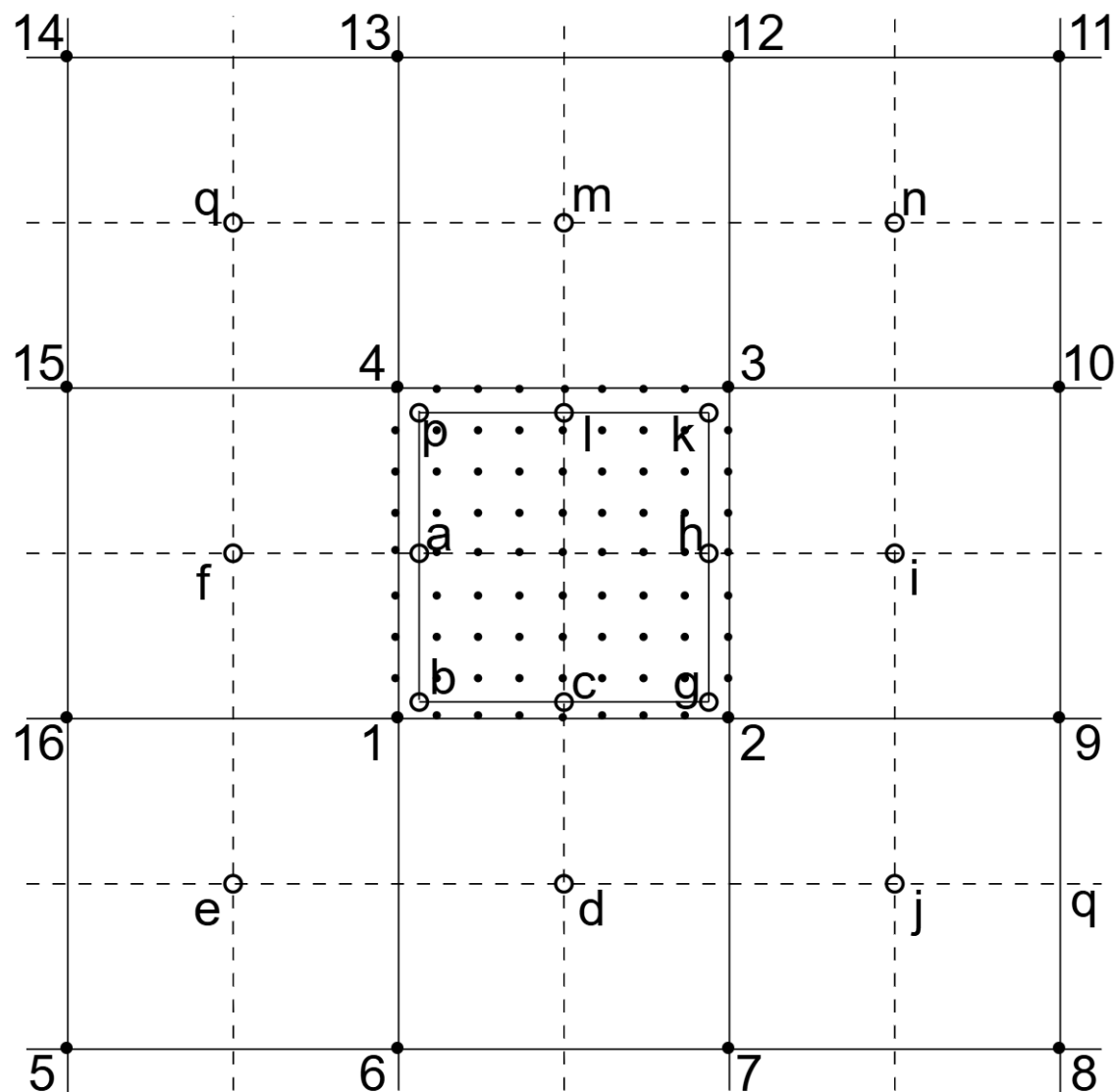
Скважины



Well bushes



Расчетная сетка



1÷16 – макросеточные узлы

○ – потоковые линии

Потоковые контуры:

Для узла 1 – abcdef,

Для узла 2 – cghijd,

Для узла 3 – ihklmn,

Для узла 4 – lpaqfm.

Математическая модель

$$\frac{\partial(\varphi^\alpha \rho_o^\alpha S_o^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_o^\alpha \vec{U}_o^\alpha) + q_o^\alpha = 0, \quad q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\varphi^\alpha \rho_w^\alpha S_w^\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_w^\alpha \vec{U}_w^\alpha) + q_w^\alpha = 0, \quad q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \quad (2)$$

$$\lambda_o^m = \frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \quad \lambda_w^m = \frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}, \quad (3)$$

$$\vec{U}_o^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{ro}(S_o^\alpha)}{\mu_o} \text{grad} P^\alpha, \quad \vec{U}_w^\alpha = -\frac{k^\alpha k_{rw}(S_w^\alpha)}{\mu_w} \text{grad} P^\alpha. \quad (4)$$

$$P^m|_{t=0} = P_0, \quad P^f(0;0) = P_b, \quad \left. \frac{\partial P^f}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial P^f}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial P^f}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial P^f}{\partial y} \right|_{y=l} = 0. \quad (5)$$

Уравнение пьезопроводности

$$\frac{S_o}{\rho_o} \frac{\partial(\phi \rho_o)}{\partial t} + \frac{S_w}{\rho_w} \frac{\partial(\phi \rho_w)}{\partial t} + \text{DIG} = 0, \quad (1)$$

$$\text{DIG} = \frac{1}{\rho_o} \text{div}(\rho_o \vec{U}_o) + \frac{1}{\rho_w} \text{div}(\rho_w \vec{U}_w) + \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_o}{\rho_o}.$$

$$\text{If } S_o = S_w = 0.5, \quad \kappa = k \left(\frac{k_{ro}(0.5)}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(0.5)}{\mu_w} \right) \left[0.5 \phi \left(\frac{\alpha_o}{\rho_o^{(0)}} + \frac{\alpha_w}{\rho_w^{(0)}} \right) \right]^{-1},$$

уравнение (1) представимо как

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \text{div}(\kappa \text{grad} P) = 0.$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \kappa \operatorname{div}(\operatorname{grad} P) = 0, \quad \kappa = k \left(\frac{k_{ro}(0.5)}{\mu_o} + \frac{k_{rw}(0.5)}{\mu_w} \right) \left[0.5 \varphi \left(\frac{\alpha_o}{\rho_o^{(0)}} + \frac{\alpha_w}{\rho_w^{(0)}} \right) \right]^{-1}, \quad (1)$$

Дискретный аналог:

$$\frac{\hat{u}_{ik} - u_{ik}}{\tau} - \kappa \left(\frac{1}{h_x} \left(\frac{\hat{u}_{i+1k} - \hat{u}_{ik}}{h_x} - \frac{\hat{u}_{ik} - \hat{u}_{i-1k}}{h_x} \right) + \frac{1}{h_y} \left(\frac{\hat{u}_{ik+1} - \hat{u}_{ik}}{h_y} - \frac{\hat{u}_{ik} - \hat{u}_{ik-1}}{h_y} \right) \right) = F_{ik}(\hat{u}) = 0.$$

Здесь $P(t, x, y) = u(t, x, y)$, $F_{ik}(\hat{u})$ — невязка на макросетке.

Коэффициенты для метода переменных направлений:

$$A_{ik}^x = \frac{\kappa}{h_x^2}, \quad B_{ik}^x = \frac{\kappa}{h_x^2}, \quad C_{ik}^x = \frac{2\kappa}{h_x^2}, \quad A_{ik}^y = \frac{\kappa}{h_y^2}, \quad B_{ik}^y = \frac{\kappa}{h_y^2}, \quad C_{ik}^y = \frac{2\kappa}{h_y^2}, \quad D_{ik} = 1.$$

Символьная прогонка

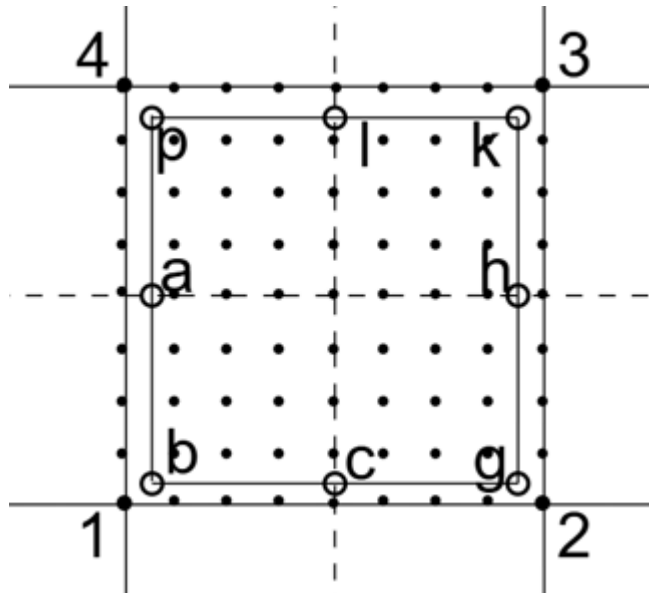
Балансное соотношение:

$$A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

$\bar{u}_i, i = 0, \dots, N$ – сеточная функция

Полиномиальное представление:

$$\bar{u}_i = c_{0i}^u + c_{1i}^u \pi_1 + c_{2i}^u \pi_2 + c_{3i}^u \pi_3 + c_{4i}^u \pi_4$$



$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ – давление в узлах 1-4

$$\bar{\beta}_i = c_{0i}^\beta + \sum_{n=1}^4 c_{ni}^\beta \pi_n - \text{прогоночный коэффициент}$$

$$\bar{F}_i = c_{0i}^F + \sum_{n=1}^4 c_{ni}^F \pi_n - \text{невязка}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \frac{A_i \bar{\beta}_i + \bar{F}_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Символьная прогонка

Внешние итерации на макросетке: $\bar{u}_{ik}^{s+1} = \bar{u}_{ik}^s + \delta \bar{u}_{ik}^s.$

Невязка на внешних итерациях: $F(u_{ik}^s, u_{i-1k}^s, u_{i+1k}^s, u_{ik-1}^s, u_{ik+1}^s) = F_{ik}^s.$

Балансное соотношение после линеаризации:

$$D_{ik} \delta u_{ik}^s + (-\tau A_{ik}^x \delta u_{i-1k}^s + \tau C_{ik}^x \delta u_{ik}^s - \tau B_{ik}^x \delta u_{i+1k}^s) + (-\tau A_{ik}^y \delta u_{ik-1}^s + \tau C_{ik}^y \delta u_{ik}^s - \tau B_{ik}^y \delta u_{ik+1}^s) = 0 - \tau F_{ik}^s.$$

ИЛИ

$$D_{ik} v_{ik} + (-\tau A_{ik}^x v_{i-1k} + \tau C_{ik}^x v_{ik} - \tau B_{ik}^x v_{i+1k}) + (-\tau A_{ik}^y v_{ik-1} + \tau C_{ik}^y v_{ik} - \tau B_{ik}^y v_{ik+1}) = 0 - \tau F_{ik}^s,$$

где $v = \delta u^s$

Символьная прогонка

Внутренние итерации на микросетке: $\bar{v}^{r+1} = \bar{v}^r + \delta \bar{v}^{r+1}$.

Где
$$\bar{v} = c_0^v + \sum_{n=1}^4 c_n^v \pi_n$$

Невязка на внутренних итерациях:

$$G_{ik} = D_{ik} v_{ik} + (-\tau A_{ik}^x v_{i-1k} + \tau C_{ik}^x v_{ik} - \tau B_{ik}^x v_{i+1k}) + (-\tau A_{ik}^y v_{ik-1} + \tau C_{ik}^y v_{ik} - \tau B_{ik}^y v_{ik+1}) + \tau F_{ik}^s = 0.$$

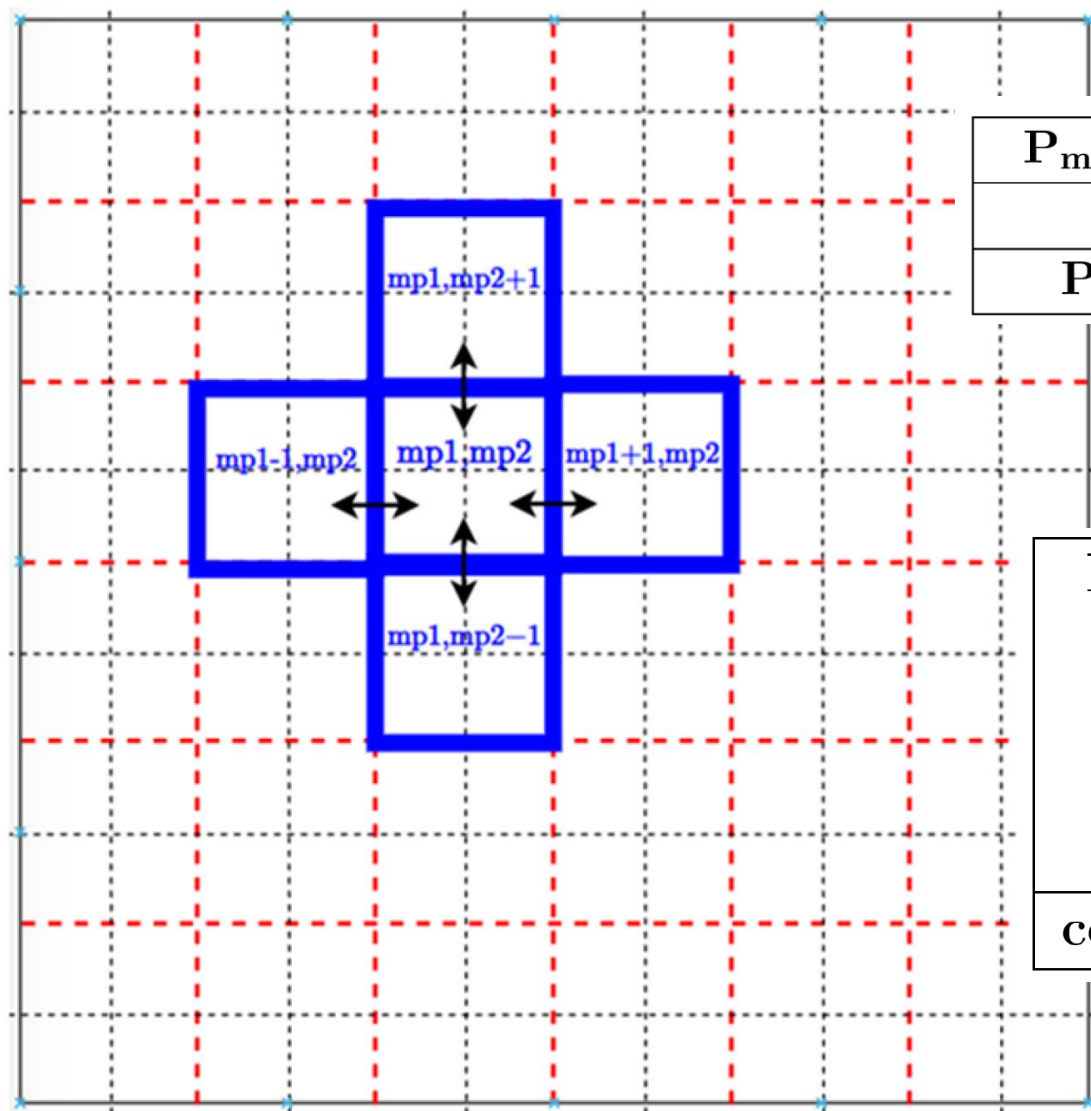
Метод переменных направлений

По Ох:
$$\frac{\delta \bar{v}_{ik}^{r+1}}{\tau^r} + D_{ik} \bar{v}_{ik}^{r+1} + (-\tau A_{ik}^x \delta \bar{v}_{i-1k}^{r+1} + \tau C_{ik}^x \delta \bar{v}_{ik}^{r+1} - \tau B_{ik}^x \delta \bar{v}_{i+1k}^{r+1}) = 0 - \bar{G}_{ik}^r.$$

По Оу:
$$\frac{\delta \bar{v}_{ik}^{r+2}}{\tau^{r+1}} + D_{ik} \bar{v}_{ik}^{r+2} + (-\tau A_{ik}^y \bar{v}_{ik-1}^{r+2} + \tau C_{ik}^y \bar{v}_{ik}^{r+2} - \tau B_{ik}^y \bar{v}_{ik+1}^{r+2}) = 0 - \bar{G}_{ik}^{r+1}.$$

τ^r — итерационный параметр

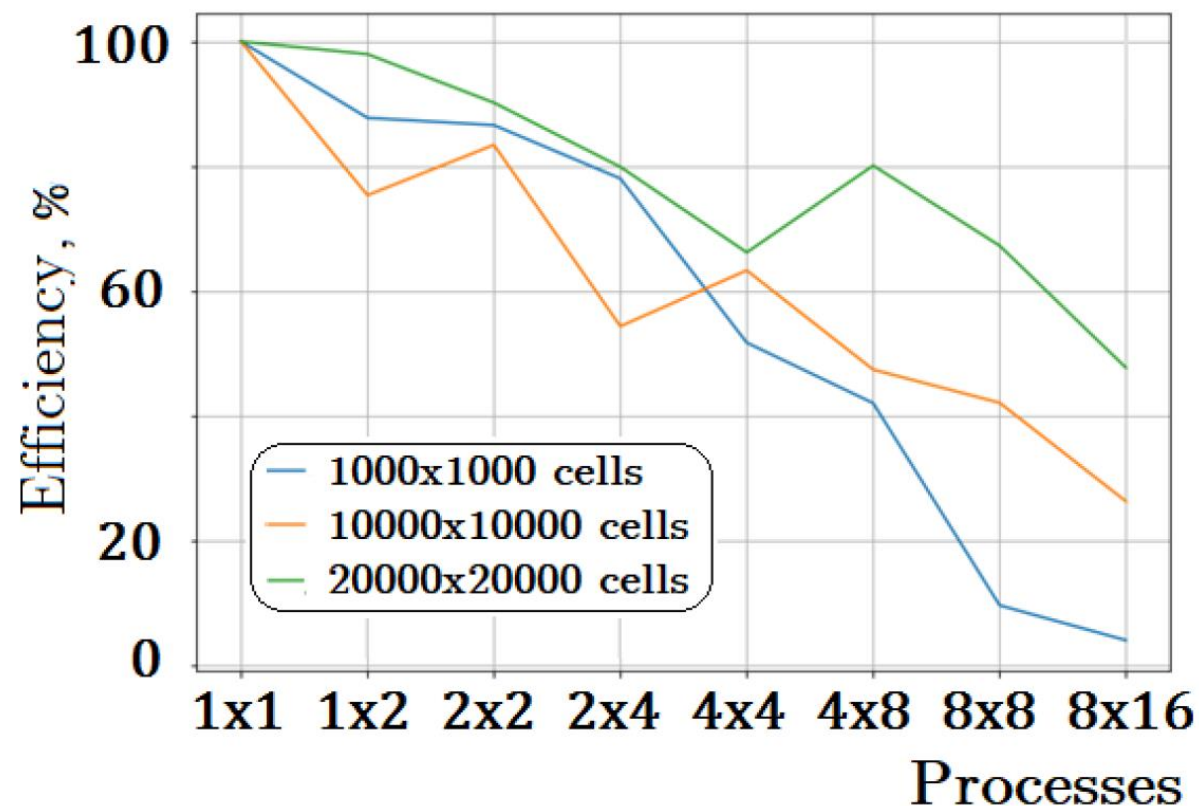
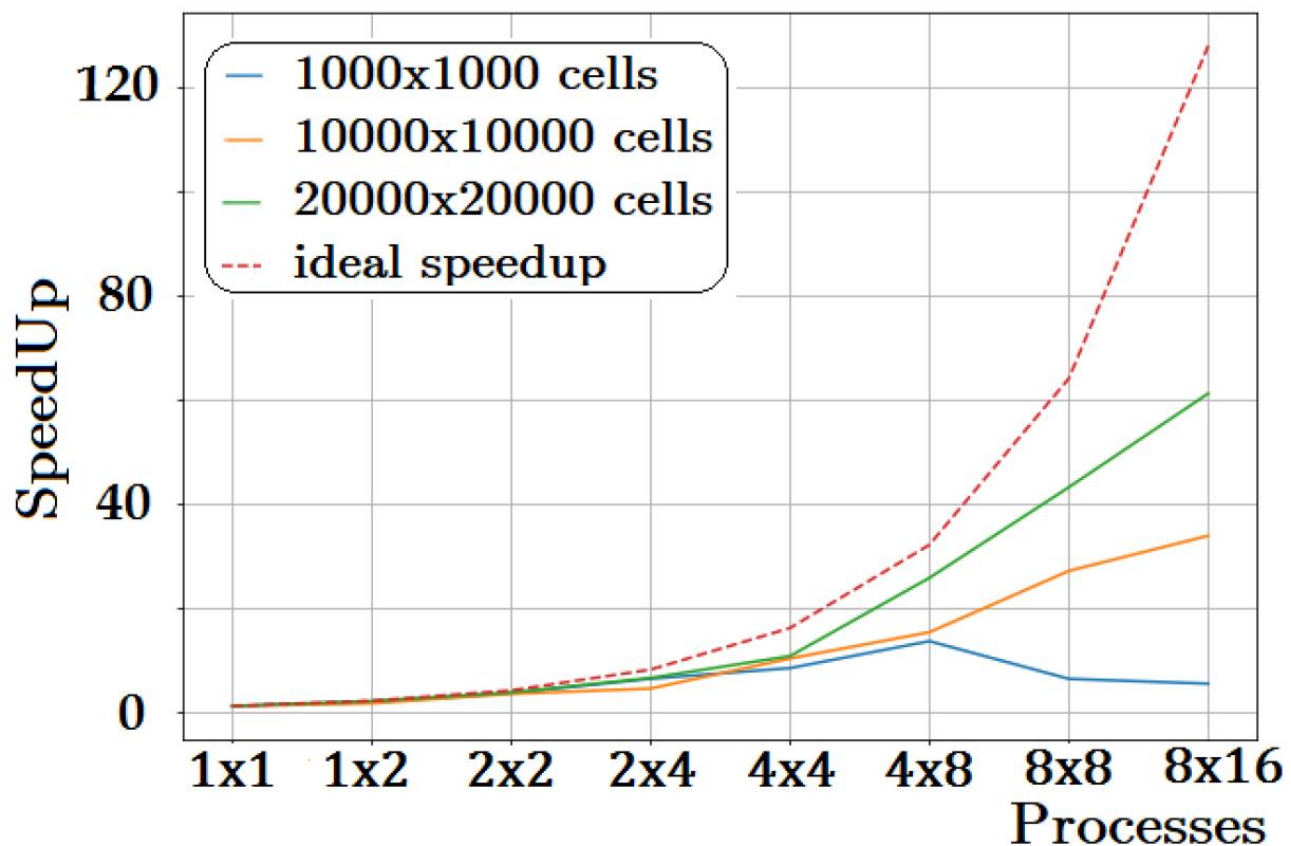
Параллельный алгоритм



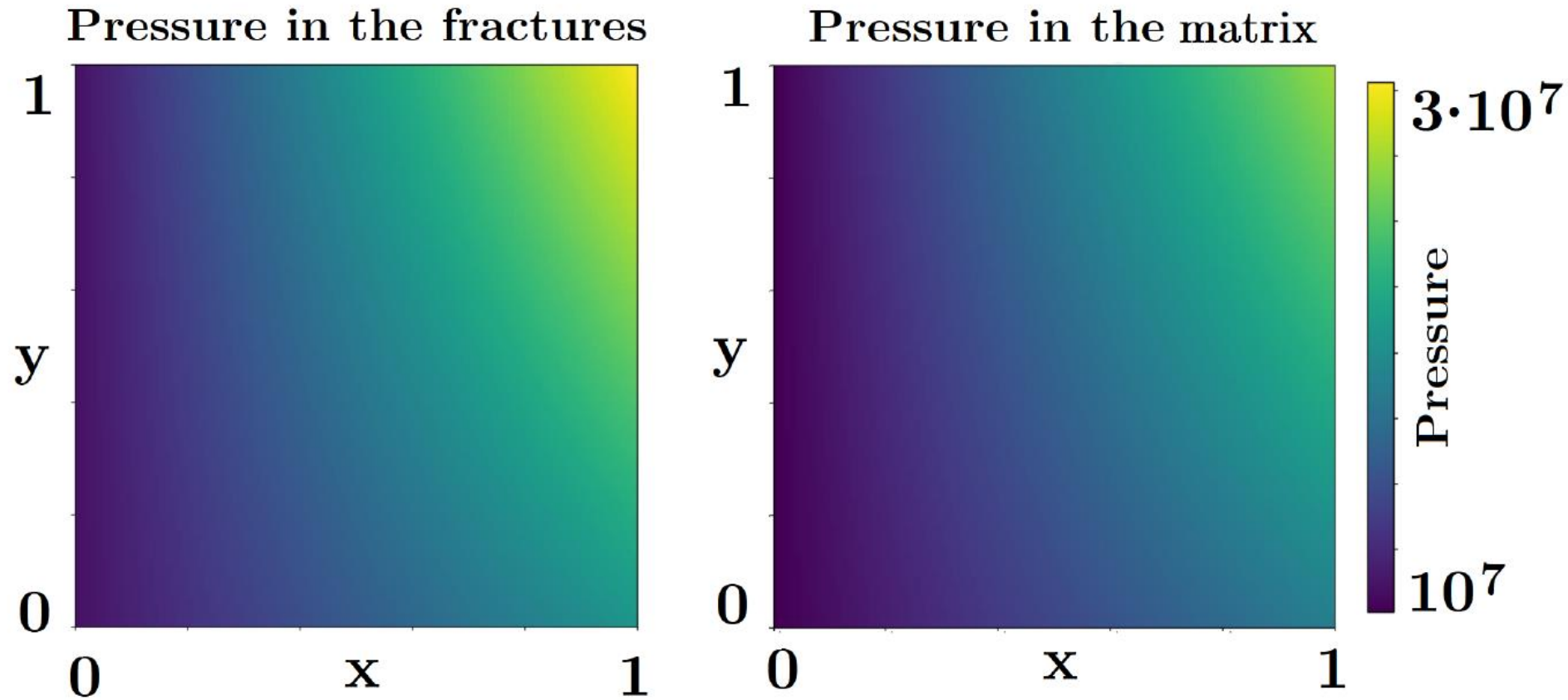
$P_{mp1-1,mp2+1} \leftrightarrow P_{mp1,mp2+1} \leftrightarrow P_{mp1+1,mp2+1}$ (line $mp2+1$)
$P_{mp1-1,mp2} \leftrightarrow P_{mp1,mp2} \leftrightarrow P_{mp1+1,mp2}$ (line $mp2$)
$P_{mp1-1,mp2-1} \leftrightarrow P_{mp1,mp2-1} \leftrightarrow P_{mp1+1,mp2-1}$ (line $mp2-1$)

$P_{mp1-1,mp2+1}$	$P_{mp1,mp2+1}$	$P_{mp1+1,mp2+1}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$P_{mp1-1,mp2}$	$P_{mp1,mp2}$	$P_{mp1+1,mp2}$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$P_{mp1-1,mp2-1}$	$P_{mp1,mp2-1}$	$P_{mp1+1,mp2-1}$
column $mp1-1$	column $mp1$	column $mp1+1$

Параллельный алгоритм



Тестовая задача. Распределение давления

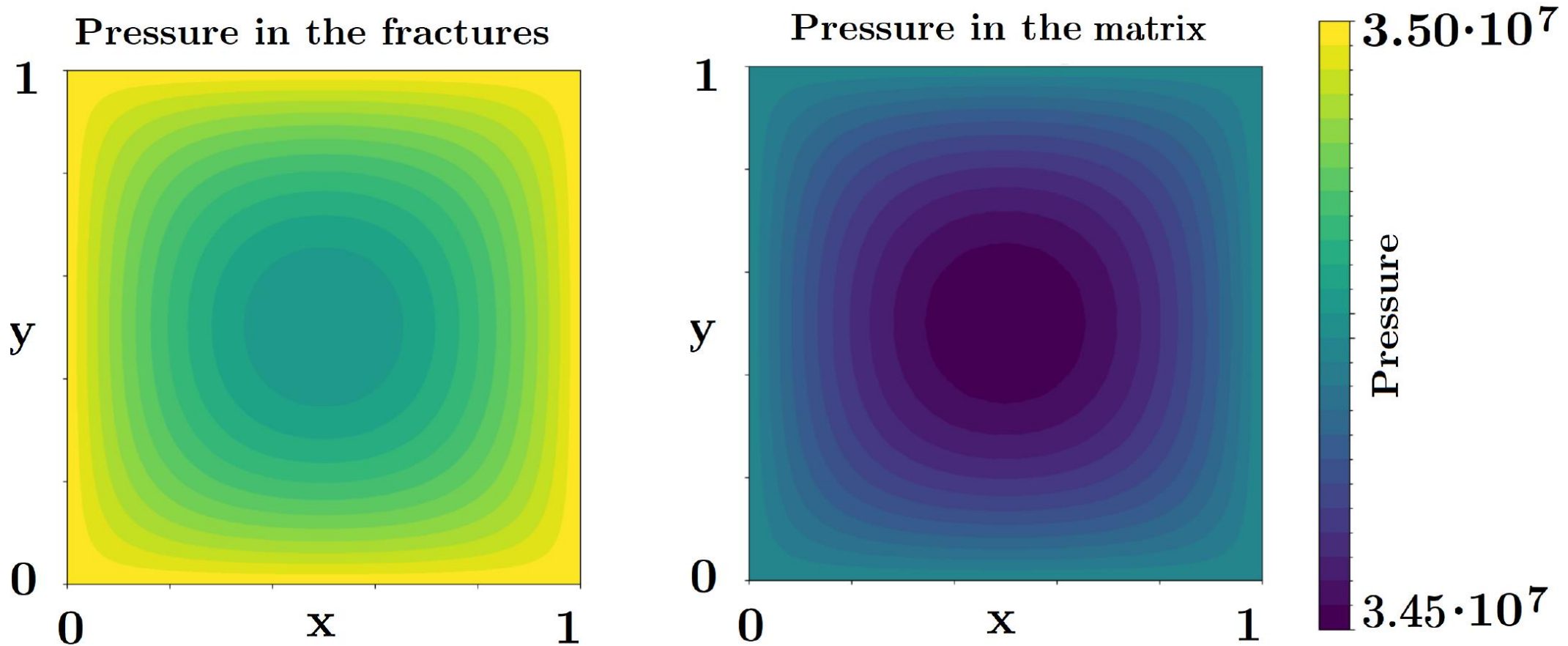


$$P_1 = P_4 = 10^7 \text{ Па}$$

$$P_2 = 2 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$P_3 = 3 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

Тестовая задача. Распределение давления



$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 3.5 \cdot 10^7 \text{ Па}$$



THANK YOU FOR YOUR ATTENTION!

A parallel algorithm for solving the piezoconductivity equation in a decomposed macrocell with an unknown mortar boundary of a fractured-porous reservoir

O.S. Yazovtseva

R. Uzyanbaev, Yu. Poveschenko, V. Podryga, I. Yanglyayev, I. Gubaydullin