

Двухшаговый метод определения диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе

Ю.Г. Смирнов, М.Ю. Медведик, М.А. Москалева

Пензенский государственный университет

2019 г.

Прямая задача дифракции

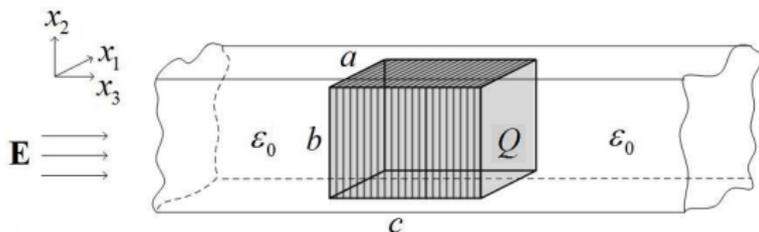


Рис. 1. Тело Q в прямоугольном волноводе P .

$Q \subset P = \{x : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < +\infty\}$ [1]. Граница ∂Q – кусочно-гладкая, поверхность волновода ∂P – идеально проводящая, $\partial Q \cap \partial P = \emptyset$. Тело Q характеризуется постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и положительной (3×3) матрицей (тензором) диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}(x)$. Компоненты $\hat{\epsilon}(x)$ представляют собой ограниченные функции в области \overline{Q} , и $\hat{\epsilon} \in L_\infty(Q)$, $\hat{\epsilon}^{-1} \in L_\infty(Q)$ [2].

Необходимо найти электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(P)$. Данное поле имеет временную зависимость вида $e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота. Источник стороннего поля – электрический ток $\mathbf{j}_E^0 \in L_{2,loc}(P)$.

Электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} должно удовлетворять уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_E^0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1)$$

Для решений (1) должны выполняться условия на бесконечности [3]: поля \mathbf{E} и \mathbf{H} при $|x_3| > C$ для достаточно больших $C > 0$ имеют представление:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^0 \\ \mathbf{H}^0 \end{pmatrix} + \sum_p R_p^{(\pm)} e^{(i\gamma_p^{(1)}|x_3|)} \begin{pmatrix} \lambda_p^{(1)} \Pi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(1)} \nabla_2 \Pi_p \\ -i\omega \epsilon_0 (\nabla_2 \Pi_p) \times \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} + \\ + \sum_p Q_p^{(\pm)} e^{(i\gamma_p^{(2)}|x_3|)} \begin{pmatrix} i\omega \mu_0 (\nabla_2 \psi_p) \times \mathbf{e}_3 \\ \lambda_p^{(2)} \psi_p \mathbf{e}_3 - i\gamma_p^{(2)} \nabla_2 \psi_p \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Также для \mathbf{E} , \mathbf{H} должны выполняться краевые условия на стенках волновода

$$\mathbf{E}_\tau|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu|_{\partial P} = 0. \quad (3)$$

В (2) \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 известное поле (падающая волна) - решение рассматриваемой краевой задачи в отсутствие неоднородного тела Q , $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon_0 \hat{I}$, $x \in P$ (\hat{I} - единичный тензор):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0, \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{E}_\tau^0|_{\partial P} = 0, \mathbf{H}_\nu^0|_{\partial P} = 0. \quad (5)$$

Решения \mathbf{E} и \mathbf{H} (1) могут быть выражены аналитически через \mathbf{j}_E^0 с помощью тензора Грина

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_E^1 & 0 & 0 \\ 0 & G_E^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_E^3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$G_E^1 = \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \times \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{a} y_2,$$

$$G_E^2 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2,$$

$$G_E^3 = \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2.$$

Здесь

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2}, \quad (7)$$

причем ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\mathbf{Im}\gamma_{nm} \geq 0$ и $\mathbf{Re}\gamma_{nm} \geq 0$, если $\mathbf{Im}\gamma_{nm} = 0$.

Решение задачи (1)–(3) сводится к интегро-дифференциальному уравнению [4] относительно поля \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy. \quad (8) \end{aligned}$$

Обратная задача дифракции

Данная задача состоит в определении диэлектрической проницаемости тела по результатам измерения параметров поля вне тела. Для этого выбираем точки наблюдения (x_c), расположенные за пределами тела.

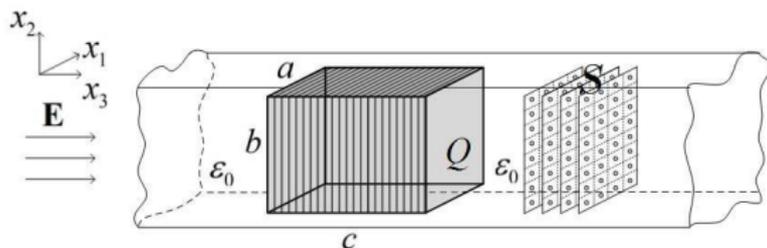


Рис. 2. Вариант расположения точек наблюдения x_c .

Рассчитаем дифрагированное поле в точках наблюдения (x_c). Для этого сначала решим уравнение (8), отвечающее прямой задаче дифракции (1)–(3), для $x \in Q$ и определим числовые характеристики поля $E(x)$ внутри тела Q .

Выберем параметры волновода так, чтобы

$$\frac{\pi}{a} < k_0 < \frac{\pi}{b}. \quad (9)$$

Пусть

$$\mathbf{E}^0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i\omega\mu_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) e^{-i\gamma_1^{(2)} x_3} \quad (10)$$

—известное падающее поле (мода в волноводе), $A^{(+)}$ —(известная) амплитуда падающей волны,

$$\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (11)$$

Представим уравнение (8) в виде системы трех скалярных уравнений. Для этого введем ток

$$\mathbf{J}(y) = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y). \quad (12)$$

Тогда электрическое поле выражается через ток по формуле

$$\mathbf{E}(y) = \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right)^{-1} \mathbf{J}(y). \quad (13)$$

Получившаяся система трех скалярных уравнений имеет вид:

$$\sum_{i=1}^3 \xi_{li} J^i(x) - k_0^2 \int_Q G(x, y) J^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_l} \operatorname{div}_x \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = E^{0l}(x), \quad (14)$$

где $l = 1, 2, 3$.

Будем искать компоненты приближенного решения $\bar{\mathbf{J}}$ в виде:

$$\bar{\mathbf{J}}^i = \sum_{k=1}^N \alpha_k^i f_k^i(x), \quad (15)$$

где $i = 1, 2, 3$, f_k^i - базисные функции.

Будем считать, что Q - параллелепипед: $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$. Разобьем тело на элементарные параллелепипеды

$$\Theta_{klm} = \left\{ x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, \right. \\ \left. x_{2,l} < x_2 < x_{2,l+1}, \right. \\ \left. x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1} \right\}$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N}k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N}l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N}m,$$

где $k, l, m = 0, \dots, N - 1$.

Шаг по каждой координате постоянен. Определим сеточные базисные функции f_{klm}^i ($i = 1, 2, 3$) следующим образом:

$$f_{klm}^i = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Theta}_{klm} \\ 0, & x \notin \overline{\Theta}_{klm}. \end{cases} \quad (16)$$

Матрица для нахождения неизвестных коэффициентов $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \alpha_k^3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right). \quad (17)$$

Элементы столбцов B_k и матриц A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^i = E_k^i(x_i), \quad (18)$$

$$A_{kl}^{ij} = \xi_{kl} f_i^l(x_j) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G^k(x_j, y) f_i^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G^l(x_j, y) f_i^l(y) dy, \quad (19)$$

где координаты точек коллокации имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}), \\ x_{i1} &= (i_1 + 0.5)h_1, \quad x_{i2} = (i_2 + 0.5)h_2, \quad x_{i3} = (i_3 + 0.5)h_3 \end{aligned} \quad (20)$$

$k, l = 1, 2, 3; i, j = 1, \dots, N.$

Используя найденные значения поля $\mathbf{E}(x)$, вычислим значение поля в точках наблюдения x_c по формуле

$$\mathbf{E}(x_c) = \mathbf{E}^0(x_c) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I} \right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \notin Q. \quad (21)$$

Таким образом, мы рассчитали дифрагированное поле в точках наблюдения x_c , необходимое для дальнейшего решения исследуемой задачи, которое также может быть получено экспериментальным путем.

Второй этап решения задачи:

$$\frac{\mathbf{J}(x_c)}{\left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)} - \mathbf{E}^0(x_c) = k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right) \mathbf{E}(y) dy +$$

$$+ \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x_c, y) \left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \notin Q. \quad (22)$$

Из уравнения (22) находим $\mathbf{J}(y)$ и определяем диэлектрическую проницаемость тела $\hat{\varepsilon}(y)$ в каждой ячейке, используя уравнение:

$$\frac{\mathbf{J}(x)}{\left(\frac{\hat{\varepsilon}(y)}{\varepsilon_0} - \hat{I}\right)} - k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy -$$

$$- \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q. \quad (23)$$

Численные результаты

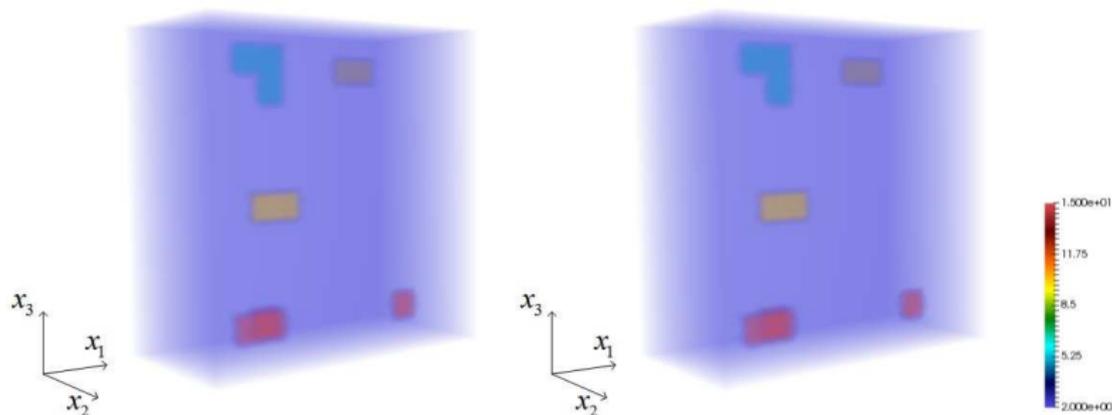


Рис. 3. Исходные и восстановленные значения модуля диэлектрической проницаемости тела.

Размеры тела: $a = 0.02 \text{ m}$, $b = 0.01 \text{ m}$, $c = 0.02$, волновое число $k_0 = 250 \text{ m}^{-1}$. Размер расчетной сетки $12 \times 12 \times 12$. Максимум модуля разности между исходным и восстановленным значением диэлектрической проницаемости составляет порядка 10^{-9} .

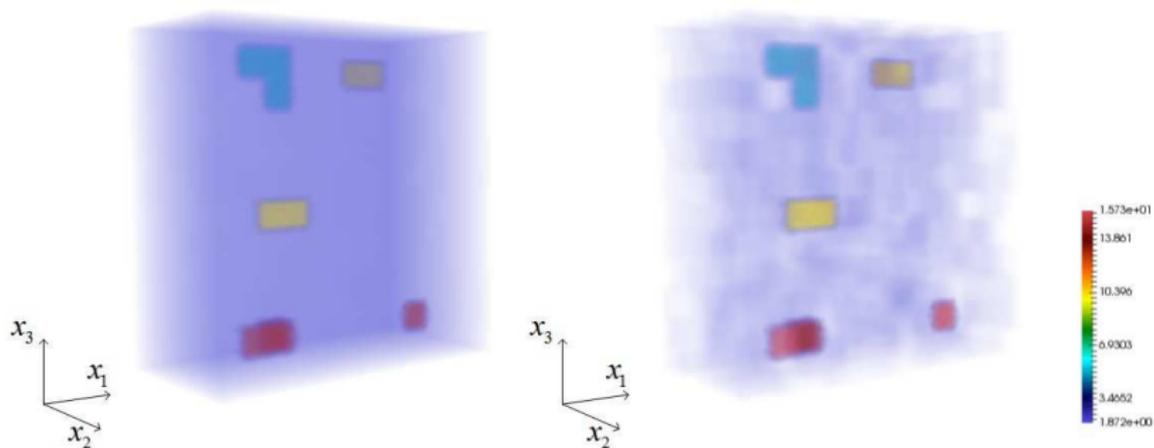


Рис. 4. Восстановленные значения модуля диэлектрической проницаемости тела с погрешностью порядка 1% и 10%.

При внесении погрешности порядка 1% максимум модуля разности между исходным и восстановленным значением диэлектрической проницаемости равен 0.070143. При внесении погрешности порядка 10% максимум модуля разности между исходным и восстановленным значением диэлектрической проницаемости равен 0.73187.

-  **Смирнов Ю.Г.** Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.
-  **Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.** Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2252–2267.
-  **Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
-  **Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г.** Обратная задача восстановления диэлектрической проницаемости неоднородного тела в волноводе. Пенза: Издательство ПГУ, 2014.