



**Суперкомпьютерные дни в России**



# **АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Елена Н. Акимова, Владимир Е. Мислов, Андрей И. Третьяков**

**Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН**

**Уральский федеральный университет**

**Екатеринбург**

**2022**

# АННОТАЦИЯ



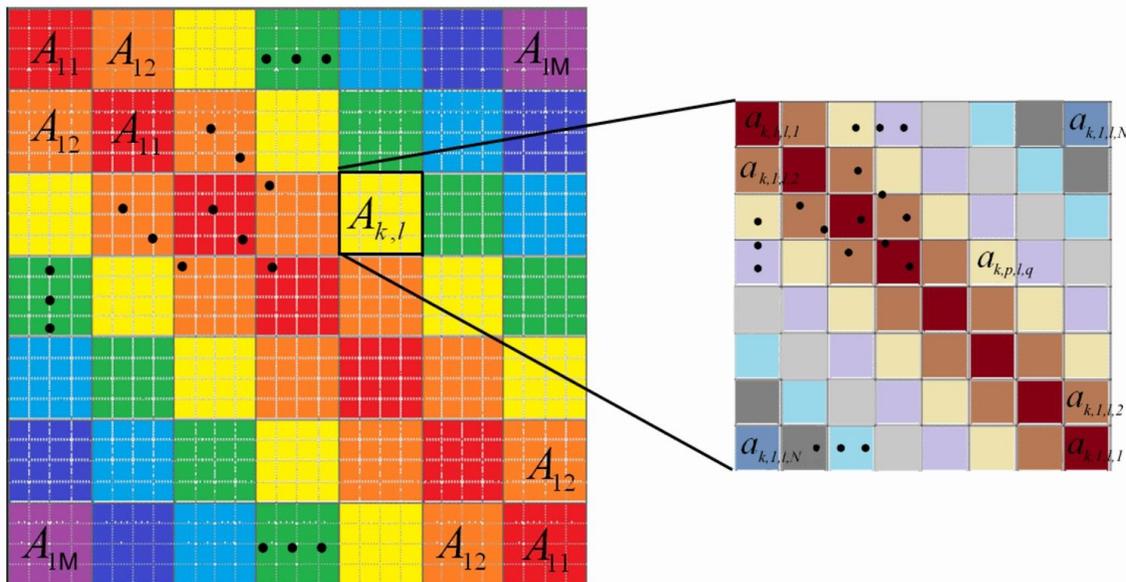
Задачи геофизики широко используются при построении геологических моделей крупных регионов или моделей Земли в целом, при прогнозировании, разведке и оценке запасов полезных ископаемых. В практических задачах необходимость исследования больших территорий с высокой степенью детализации требует использование сеток большой размерности. Обработка данных занимает много времени и требует большого объема памяти. Проблема разработки пакетов прикладных программ для многопроцессорных систем для решения задач геофизики на сетках большой размерности с помощью устойчивых параллельных алгоритмов является важной и актуальной. Существующие решения обладают рядом недостатков: коммерческие пакеты имеют большую стоимость, обладают закрытым кодом, не предназначены для решения неустойчивых задач, предназначены для работы на ПК.

В работе представлен комплекс программ для решения геофизических задач на многопроцессорных системах с многоядерными и графическими процессорами с использованием новых вычислительных технологий. Комплекс основан на построенных авторами быстрых и устойчивых методах и параллельных алгоритмах решения линейных и нелинейных прямых и обратных задач гравиметрии и магнитометрии. Разработанный комплекс программ для решения геофизических задач может быть использован в составе программных пакетов, предназначенных для геофизических исследований.

# ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА



- Обратные задачи геофизики - некорректно поставленные (неустойчивые)
- СЛАУ с матрицами специальной структуры
- Параллельные программы для многоядерных и графических процессоров с использованием технологий MPI, OpenMP, CUDA (сокращают время).



Работоспособность комплекса проверена на серии задач с модельными и реальными данными на основе карт гравитационных и магнитных аномалий для районов Среднего и Южного Урала.

# ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ В СЛОЕ

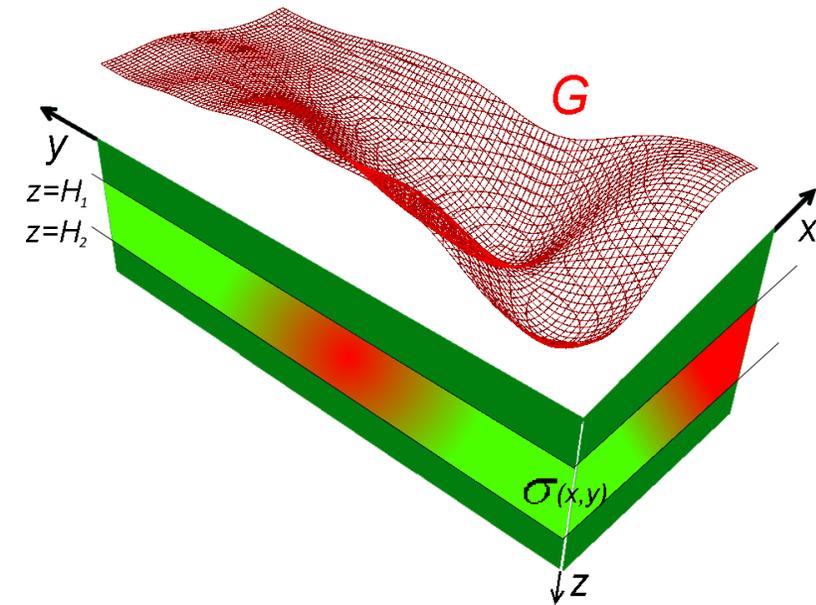
Плоскость  $xOy$  совпадает с дневной поверхностью, ось  $z$  направлена вниз. Рассматривается линейная обратная задача гравиметрии о нахождении переменной плотности  $\sigma(x, y)$  в горизонтальном слое:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R^3: (x, y) \in D, H_1(x, y) \leq z \leq H_2(x, y)\},$$

где  $H_1(x, y) = H_1 = const, H_2(x, y) = H_2 = const$ ,  
по гравитационным данным, измеренным на земной поверхности

$$D = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Распределение плотности  $\sigma(x, y)$  внутри слоя не зависит от  $z$ .



Горизонтальный слой

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Задача описывается уравнением Фредгольма 1-го рода относительно искомой плотности  $\sigma(x, y)$ :

$$f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2}} \right\} \sigma(x', y') dx' dy' = \Delta g(x, y, 0),$$

где  $\Delta g(x, y, 0)$  — аномальное гравитационное поле, измеренное на земной поверхности,

$f$  — гравитационная постоянная,

$x$  и  $y$  — координаты точки наблюдения на земной поверхности,

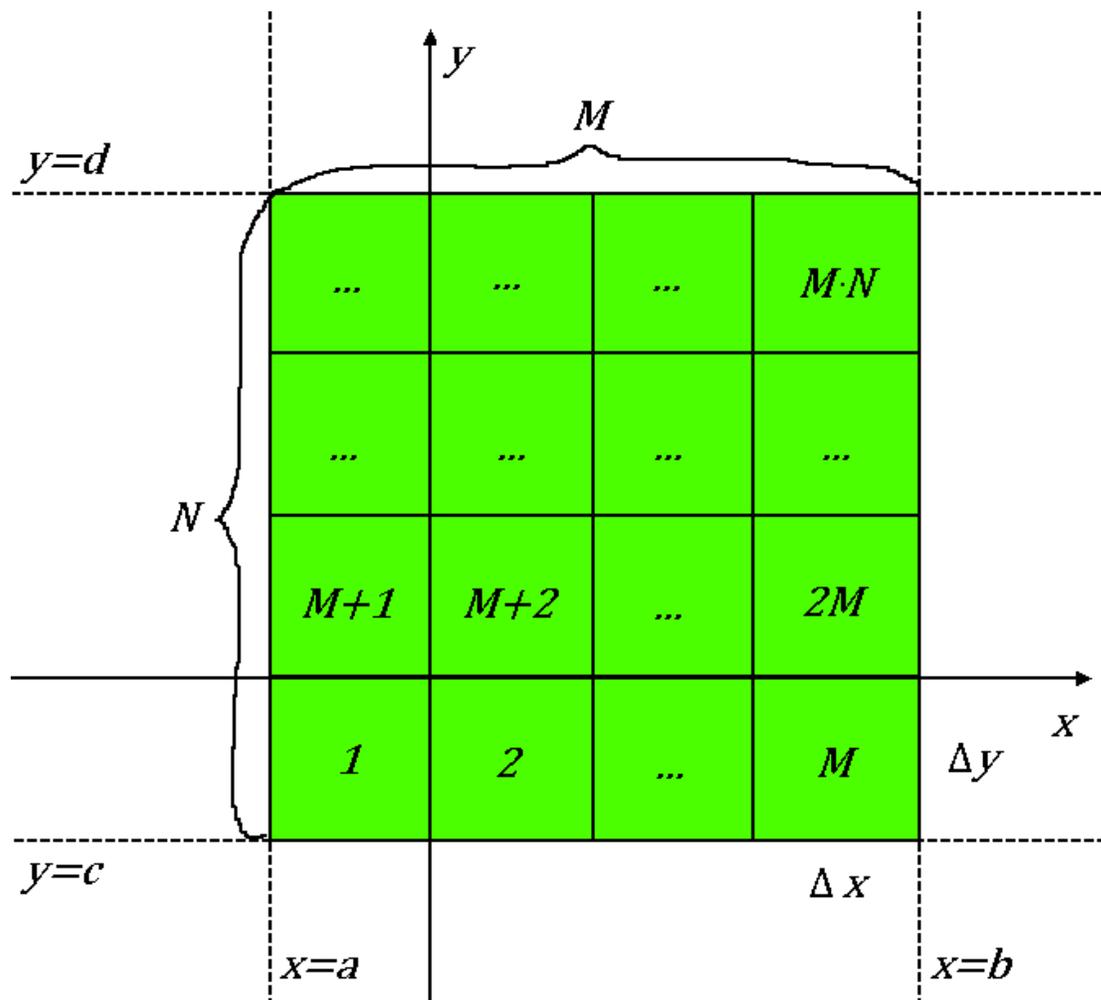
$x'$  и  $y'$  — координаты точек интегрирования.

Уравнение в операторном виде

$$A(\sigma) = \Delta g,$$

где  $A: L_2 \rightarrow L_2$  — дифференцируемый по Фреше оператор.

# ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ



Разбиваем область интегрирования по переменным  $x$  и  $y$  на сетке  $n \times m$ :  $(x_i, y_j), i = 1..n, j = 1..m$  с шагами  $\Delta x, \Delta y$ .

Получим вектор правой части

$$b = \{b_{(v-1) \cdot M + u}\} = \{\Delta g(x_u, y_v, 0), u = 1..M, v = 1..N\}$$

и вектор решения

$$z = \{z_{(j-1) \cdot M + i}\} = \{\Delta \sigma(x_i, y_j), i = 1..M, j = 1..N\}$$

размерности  $MN$ .

# ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ

После аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам получим уравнение в дискретном виде:

$$f \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + H_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + H_2^2}} \right\} \sigma(x_i, y_j) \Delta x \Delta y = \Delta g(x_u, y_v, 0),$$

$u = 1..M, \quad v = 1..N.$

Задача сводится к решению СЛАУ с плохо обусловленной симметричной матрицей  $n \times n = MN \times MN$

$$(A + \alpha E)z = b, \quad \text{схема Лаврентьева}$$

где  $\alpha$  — параметр регуляризации.

# СТРУКТУРА МАТРИЦЫ СЛАУ

Коэффициенты СЛАУ (элементы матрицы  $A$ ) имеют вид

$$a_{(j-1)M+i,(v-1)M+u} = a_{i,j,u,v} = \frac{f \Delta x \Delta y}{1} \frac{1}{\left[ (x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + H_1^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[ (x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + H_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}},$$

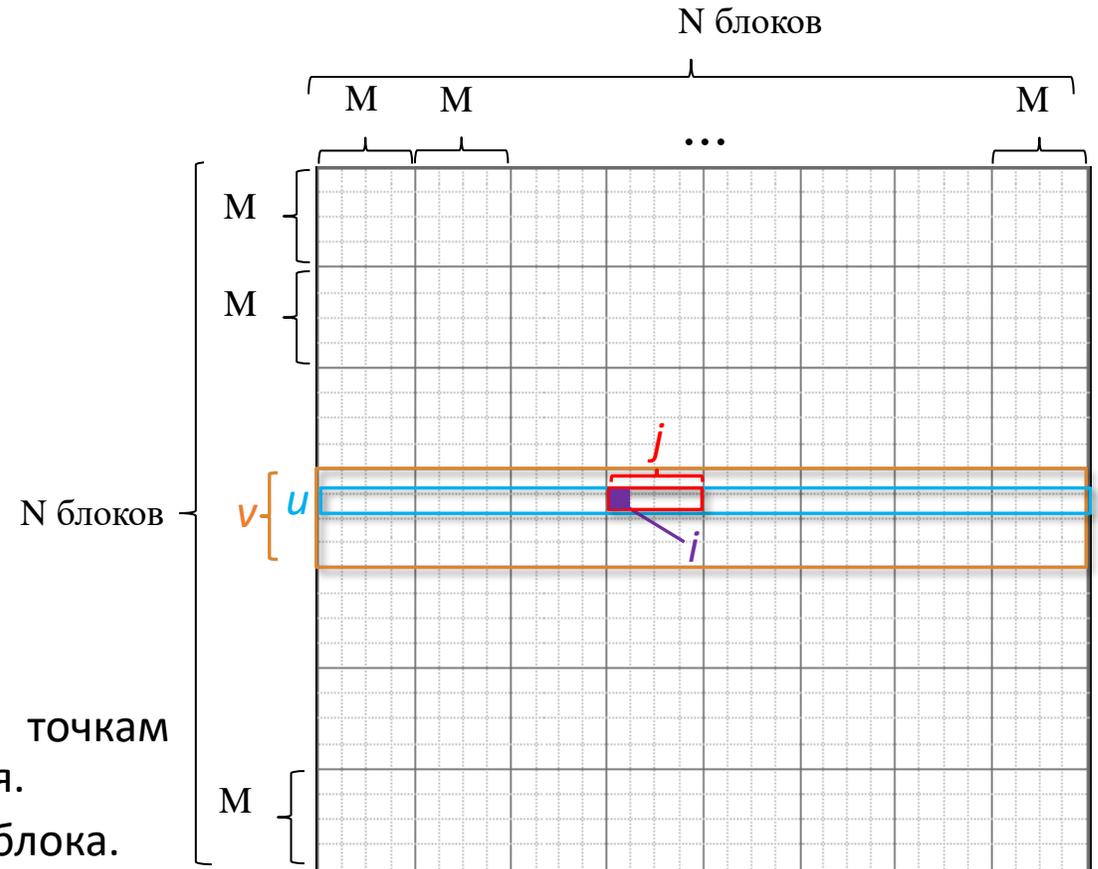
$i, u = 1..M, \quad j, v = 1..N.$

Строка матрицы соответствует перебору по всем точкам интегрирования по сетке для одной фикс. точки наблюдения.

$(j, v)$  — индексы блока,  $(i, u)$  — индексы элемента внутри блока.

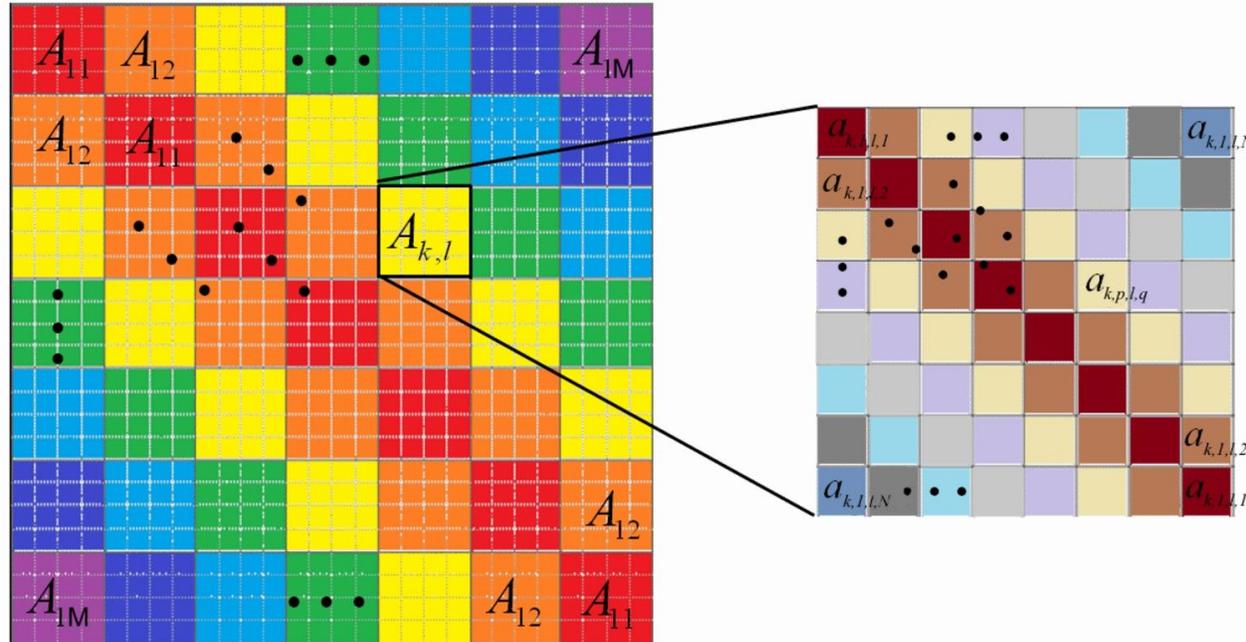
Значения коэффициентов зависят только от

$$(x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2$$



Размерность матрицы  $MN \times MN$

# СТРУКТУРА МАТРИЦЫ СЛАУ



Теплицева матрица — матрица, в которой на всех диагоналях, параллельных главной, стоят равные элементы.

Матрица  $A$  является тёплицево-блочнo-тёплицевой (ТБТ).

Каждая блочная диагональ состоит из одинаковых блоков.

Внутри каждого блока диагонали состоят из одинаковых элементов.

### Утверждение 1.

При смещении индексов  $i$  и  $u$  (индексы для  $x$ ) на одинаковую величину значения элементов матрицы совпадают.

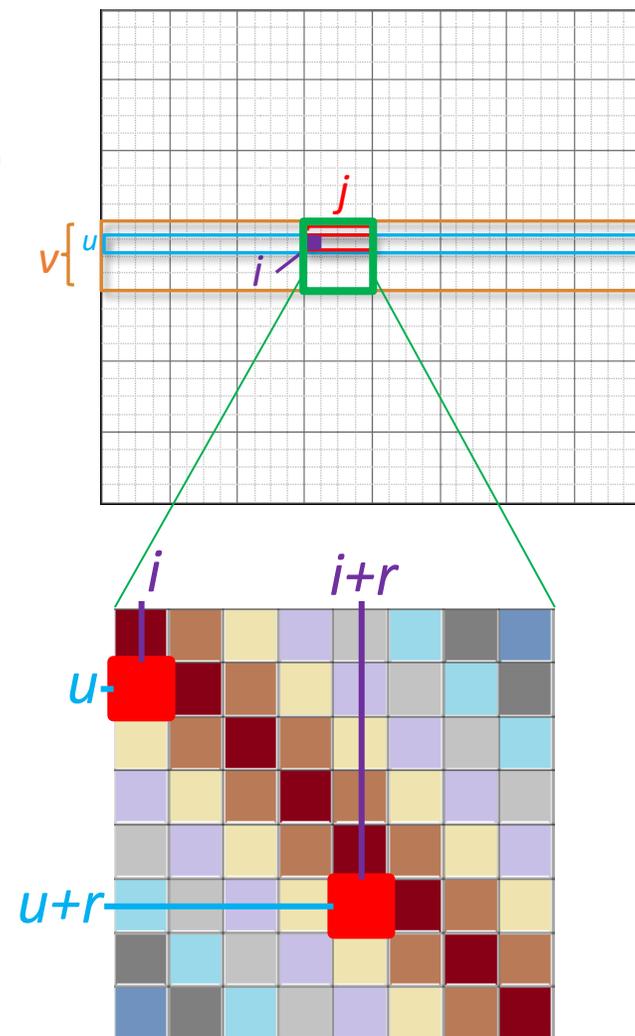
$$\forall r: ((u + r) \in 1..M) \wedge ((i + r) \in 1..M)$$

выполняется равенство  $a_{i,j,u,v} = a_{i+r,j,u+r,v}$ .

В каждом блоке диагонали состоят из одинаковых элементов.

### Обоснование.

$$(x_{u+r} - x_{i+r}) = (x_u + r\Delta x - x_i - r\Delta x) = (x_u - x_i).$$



## Утверждение 2.

При смещении индексов  $j$  и  $v$  (индексы для  $y$ ) на одинаковую величину значения элементов матрицы совпадают.

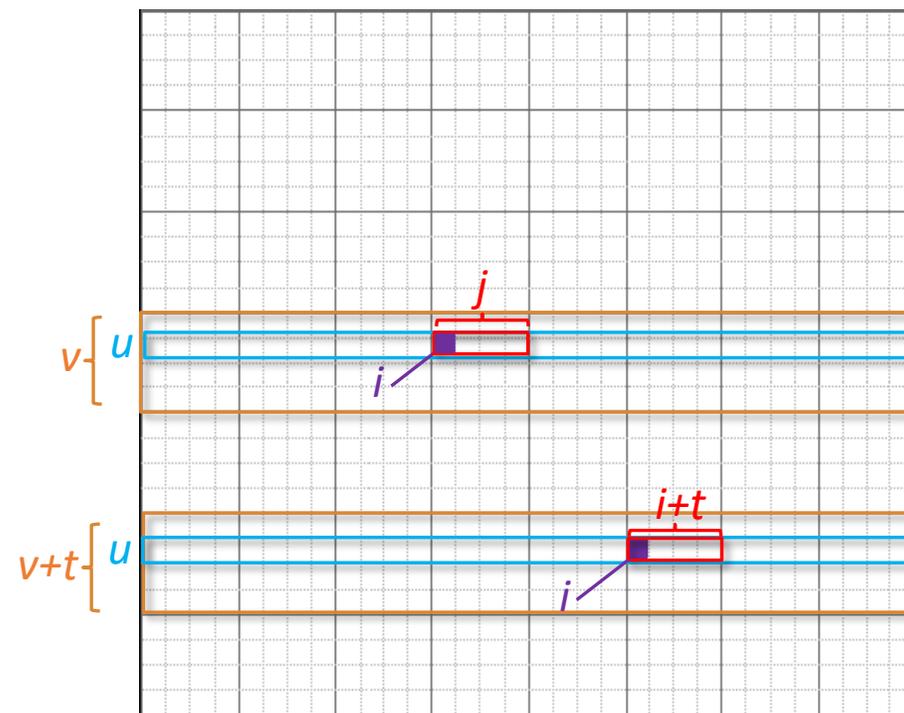
$$\forall t: ((v + t) \in 1..N) \wedge ((j + t) \in 1..N)$$

выполняется равенство  $a_{i,j,u,v} = a_{i,j+t,u,v+t}$ .

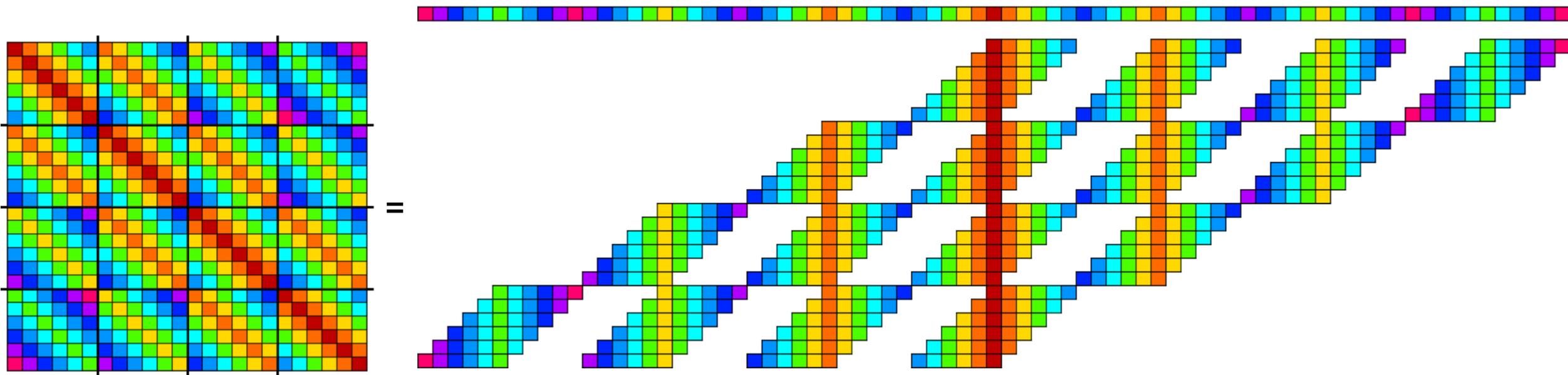
Каждая блочная диагональ состоит из одинаковых блоков.

**Обоснование.**

$$(y_{v+t} - y_{j+t}) = (y_v + t\Delta y - ty_j - t\Delta y) = (y_v - y_j).$$



# ОПТИМИЗАЦИЯ ХРАНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ



Вместо вычисления и хранения полной матрицы размерности  $MN \times MN$  достаточно хранить только  $(2M - 1)(2N - 1)$  уникальных элементов.

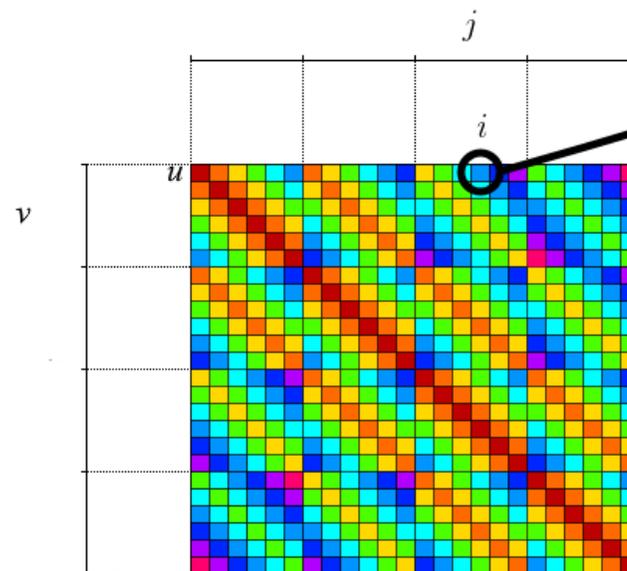
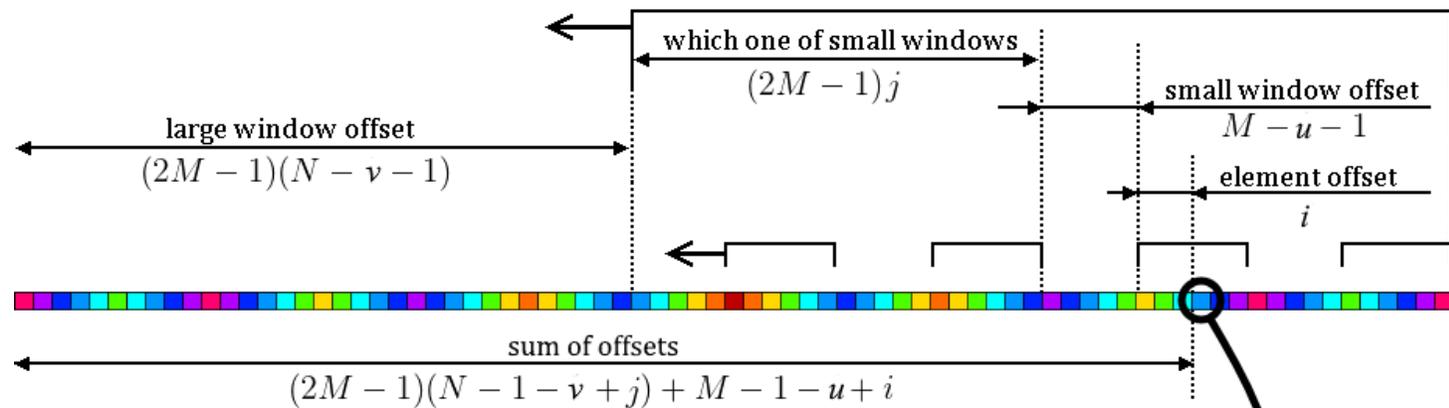
## Экономия памяти!

Для сетки  $512 \times 512$  полное хранение матрицы **512 ГБ**, а в сжатом виде — менее **8 МБ** (в 65536 раз меньше)

# ДОСТУП К ЭЛЕМЕНТАМ МАТРИЦЫ

По индексам элемента матрицы  $a_{i,j,u,v}$  вычисляется его индекс в хранимой сжатой строке  $s$ :

$$a_{i,j,u,v} = C_{(2M-1)(N-1-v+j)+M-1-u+i}$$



Пример для  $i = 4$ ,  
 $j = 3$ ,  $u = 1$ ,  $v = 1$

# ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

Задача о нахождении переменной плотности  $\sigma(x, y)$

в слое  $\Pi = \{(x, y, z) : H_1(x, y) \leq z \leq H_2(x, y)\}$

по известному гравитационному полю  $\Delta g(x, y)$

измеренному в области  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

на земной поверхности. Предположим, что вне слоя

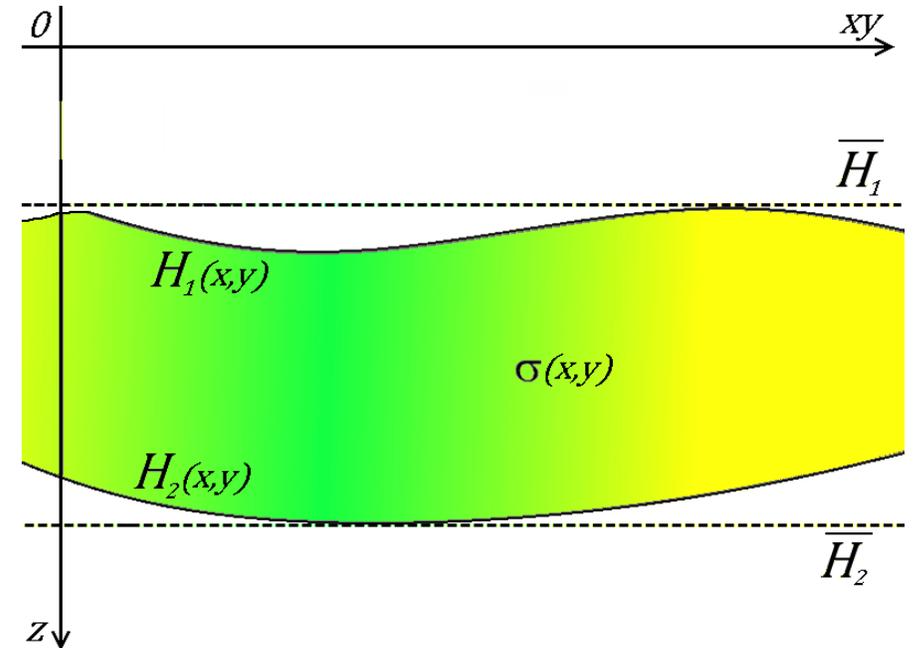
$\{(x, y, z) : \bar{H}_1 \leq z \leq H_1(x, y)\}$  и  $\{(x, y, z) : H_2(x, y) \leq z \leq \bar{H}_2\}$ ,

отсутствуют аномалии плотности.

здесь  $\bar{H}_1 = \min_{x,y}\{H_1(x, y)\}$  и  $\bar{H}_2 = \max_{x,y}\{H_2(x, y)\}$

Предположим, что распределение плотности

не зависит от координаты по оси Z.



# Интегральное уравнение

Задача описывается уравнением Фредгольма 1-го рода относительно искомой плотности  $\sigma(x, y)$ :

$$f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2(x, y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2(x, y)}} \right\} \sigma(x', y') dx' dy' = \Delta g(x, y, 0),$$

где  $H_1(x, y)$  и  $H_2(x, y)$  — границы слоя,

$\Delta g(x, y, 0)$  — аномальное гравитационное поле,

$f$  — гравитационная постоянная,

$x$  и  $y$  — координаты точки наблюдения на поверхности земли,

$x'$  и  $y'$  — координаты точек интегрирования.

# ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

После дискретизации области на прямоугольной сетке  $n = M \times N$  точек, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам, получим уравнение в дискретном виде:

$$f \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_v - x_i)^2 + (y_u - y_j)^2 + H_{1,(i-1)M+j}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_v - x_i)^2 + (y_u - y_j)^2 + H_{2,(i-1)M+j}^2}} \right\} \sigma_{(i-1)M+j} \Delta x \Delta y =$$
$$= b_{(v-1)M+u}$$
$$u \in [1..M], \quad v \in [1..N].$$

Перепишем уравнение в виде СЛАУ с несимметричной матрицей размерности  $n \times n = MN \times MN$ .

$$(A + \alpha E)z = b$$

где  $z$  — вектор искомых значений плотности,  $b$  — вектор правой части.

Коэффициенты системы

$$a_{(j-1)M+i,(v-1)M+u} = a_{i,j,u,v} =$$
$$= f \Delta x \Delta y \left( \frac{1}{\sqrt{(x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + H_{1,(j-1)M+i}^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + H_{2,(j-1)M+i}^2}} \right).$$

Матрица  $A$  — не симметричная и **не является тёплицево-блочно-тёплицевой**.

# СПОСОБ АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЦЫ СЛАУ

Вычисляются блоки, близкие к главной диагонали блоков (элементы, для которых  $|v - j| < \lambda$ ).

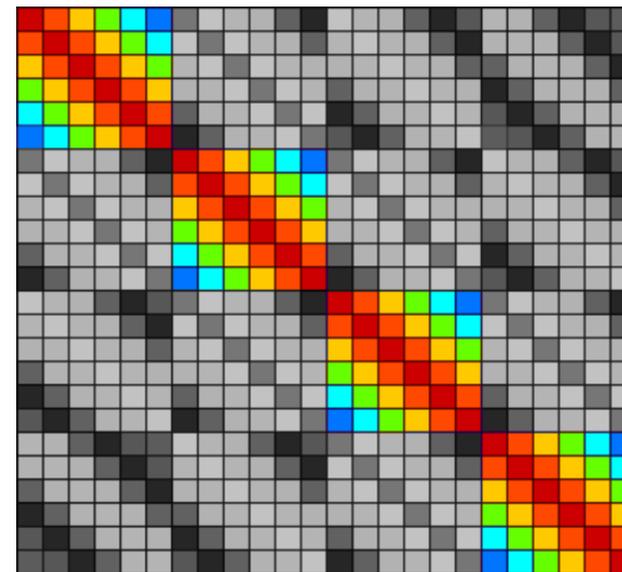
Остальные элементы заменяются на элементы с постоянными значениями  $\overline{H}_1, \overline{H}_2$  (асимптотические плоскости или средние значения по сетке).

## Способ хранения

Храним ленту блоков, элементы которых вычисляются точно, и сжатую строку для приближенных элементов.

Эксперименты показывают, что относительная погрешность решения, вычисленного с использованием этого приближения, не превышает погрешность решения при использовании исходной матрицы.

Для сетки  $512 \times 512$  полное хранение матрицы **512 ГБ**, в «сжатом» виде — **256 МБ** (в 2000 раз меньше).



**Параметр  $\lambda$**  подбирается по погрешности аппроксимации матрицы (минимальное значение, при котором погрешность  $\tau$  будет меньше заданного порога  $\tau^*$ ).

$$\tau = \frac{\|A\| - \|A_{\text{approx}}\|}{\|A\|}.$$

# ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Метод минимальных невязок (ММН) (для горизонтального слоя)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{(A(Az^k - b), Az^k - b)}{\|A(Az^k - b)\|^2} (Az^k - b), \quad \text{Условие останова} \quad \frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon.$$

Стабилизированный метод бисопряжённых градиентов для несимметричных СЛАУ (BiCGSTAB)

$$r^0 = b - Az^0, \quad \bar{r} = r^0, \quad \rho^0 = \alpha^0 = \omega^0 = 1, \quad v^0 = q^0 = 0$$

**for**  $k = 0, 1, \dots$  **do**

$$\rho^k = (\bar{r}, r^{k-1}), \quad \beta^k = \frac{\rho^k \alpha^{k-1}}{\rho^{k-1} \omega^{k-1}}$$

$$q^k = r^{k-1} + \beta^k (q^{k-1} - \omega^{k-1} v^{k-1})$$

$$v^k = Aq^k, \quad \alpha^k = \frac{\rho^k}{(\bar{r}, v^k)}$$

$$s^k = r^{k-1} - \alpha^k v^k$$

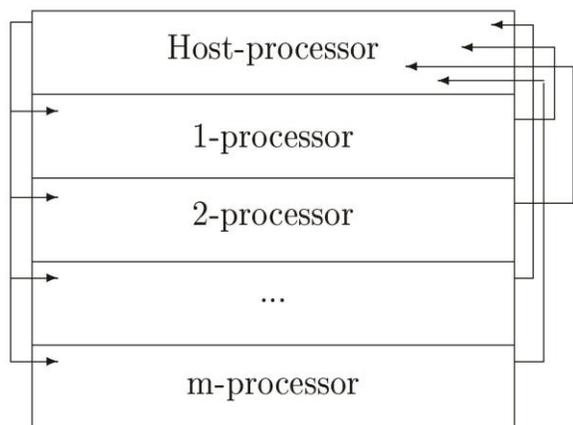
$$t^k = As^k, \quad \omega^k = \frac{(t^k, s^k)}{(t^k, t^k)}$$

$$z^k = z^{k-1} + \omega^k s^k + \alpha^k q^k, \quad r^k = s^k - \omega^k t^k$$

**enddo**

# ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ

Параллельные алгоритмы решения линейной обратной задачи гравиметрии были построены на основе методов MMH и BiCGSTAB и реализованы на узлах суперкомпьютера «Уран» с использованием технологии MPI и технологии OpenMP.



$$\begin{matrix} A \\ \text{Process 0} \\ \text{---} \\ \text{Process 1} \\ \text{---} \\ \text{Process 2} \\ \text{---} \\ \text{Process 3} \end{matrix} * \begin{matrix} b \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} c \\ 0 \\ \text{---} \\ 1 \\ \text{---} \\ 2 \\ \text{---} \\ 3 \end{matrix}$$

Схема вычислений для MPI.  
Каждый процессор выполняет вычисления в полосе.

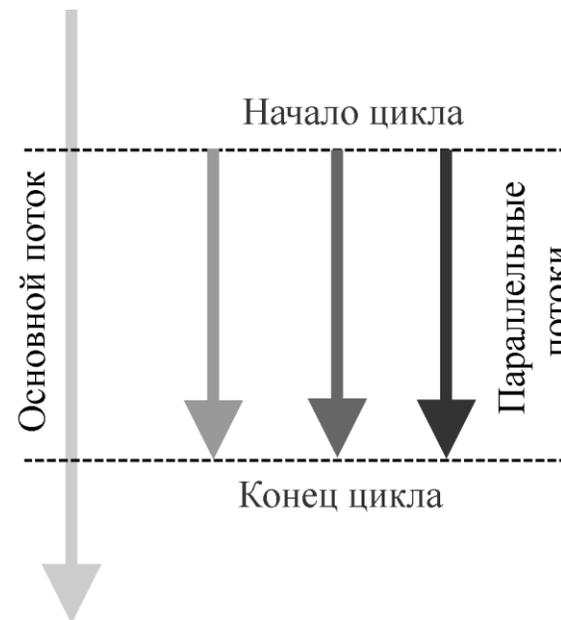


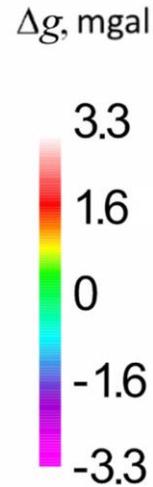
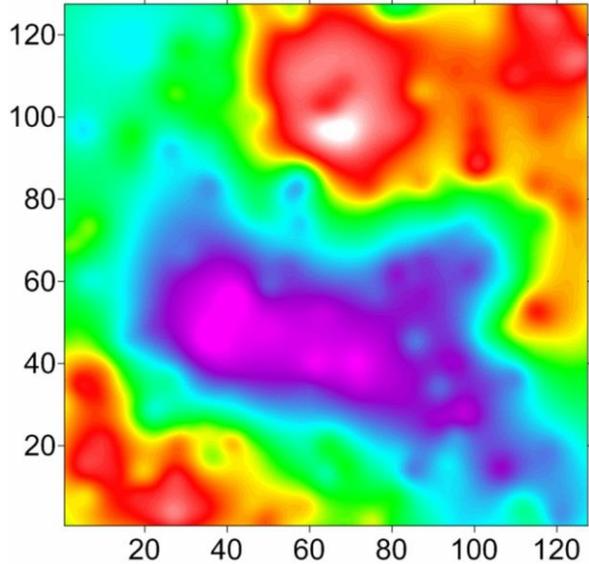
Схема вычислений для OpenMP.  
Каждое ядро выполняет вычисления в полосе.



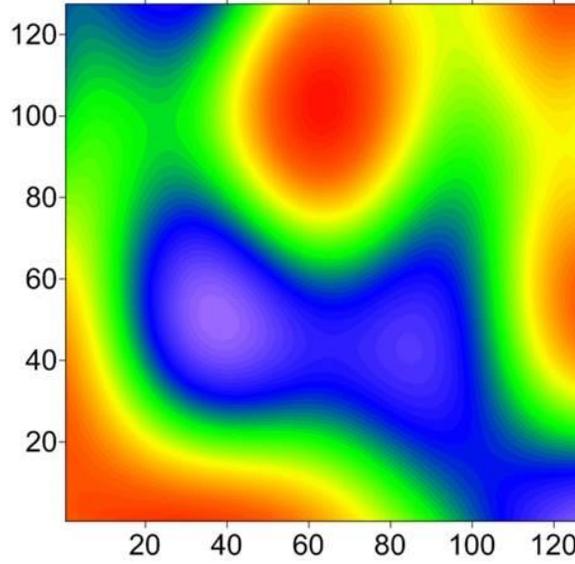
# МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ

## Нахождение переменной плотности в горизонтальном слое по гравитационным данным

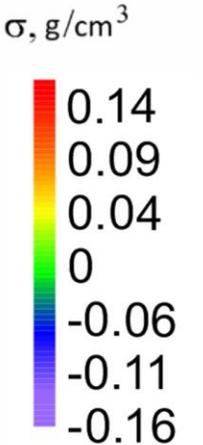
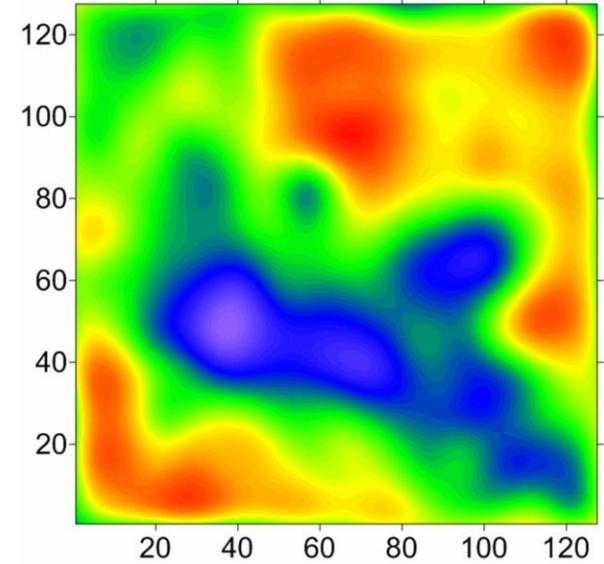
Область:  $S = 128 \times 128 \text{ km}^2$   $H_1 = 10 \text{ km}$ ,  $H_2 = 11 \text{ km}$



Возмущенное гравитационное поле (правая часть), уровень шума 80%



Исходное распределение плотности



Восстановленное распределение плотности, погрешность решения 20%

Алгоритм (MPI+OpenMP)	Время счета на Intel Xeon E5-2650, мин.		Ускорение
	1 поток	4 узла по 8 потоков	
BiCGSTAB	185	1.3	142
BiCGSTABmem	55	1.1	50

Сетка  $512 \times 512$ .

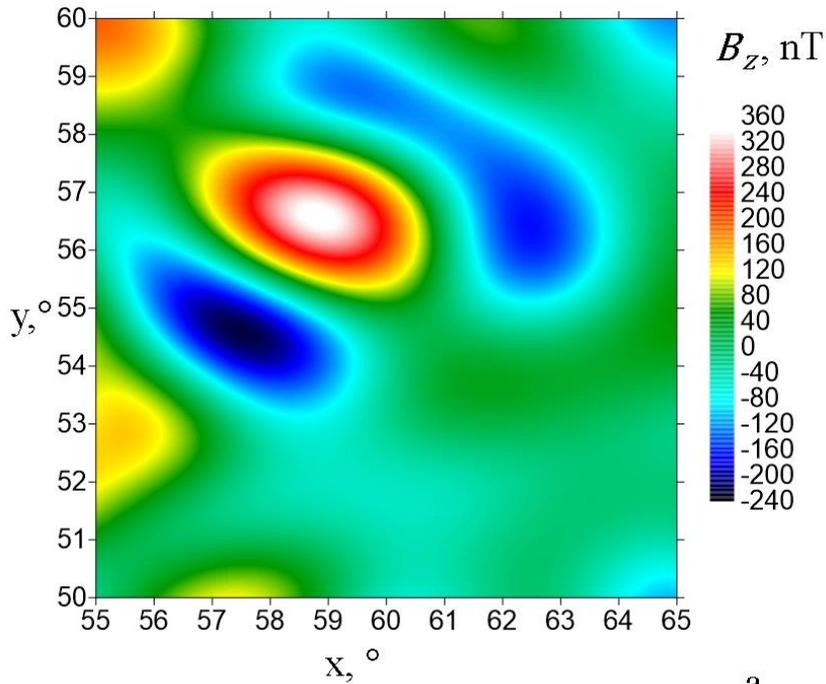
Итоговое ускорение в 168 раз (вместо 3 часов — 1 минута).

Экономия памяти в 65536 раз (вместо 512 ГБ — 8 МБ).

# ЗАДАЧА МАГНИТОМЕТРИИ (СРЕДНИЙ УРАЛ)

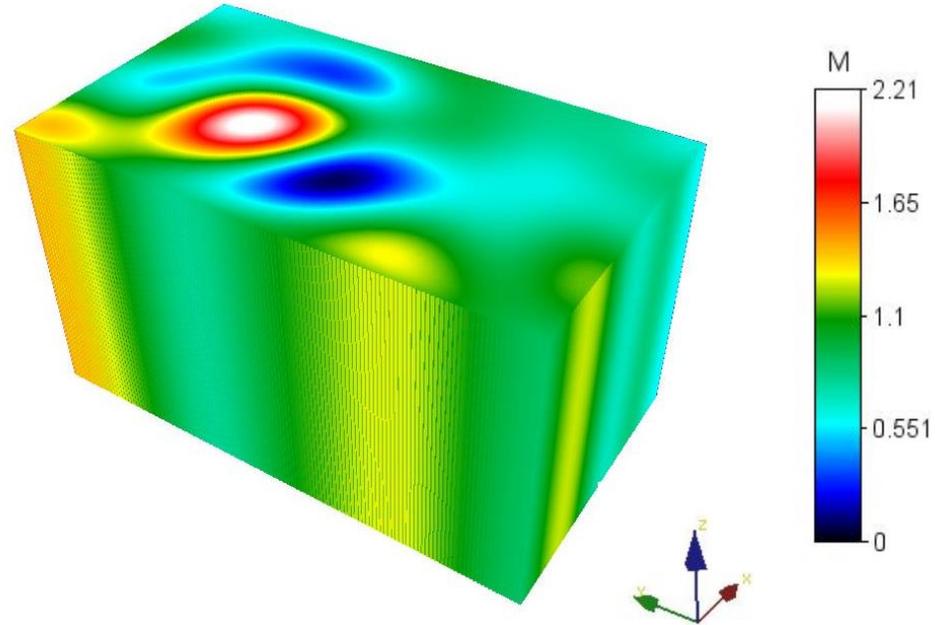


Нахождение переменной намагниченности по магнитным данным



а

Аномальное магнитное поле



б

Намагниченность

Алгоритм (OpenMP)	Время счета на Intel Xeon E5-2650, мин.			Ускорение
	1 поток	8 потоков	Tesla M2090	
BiCGSTAB	296	36.9	—	8.0
BiCGSTABmem	10	1.26	1.2	7.93

Сетка  $512 \times 512$ .

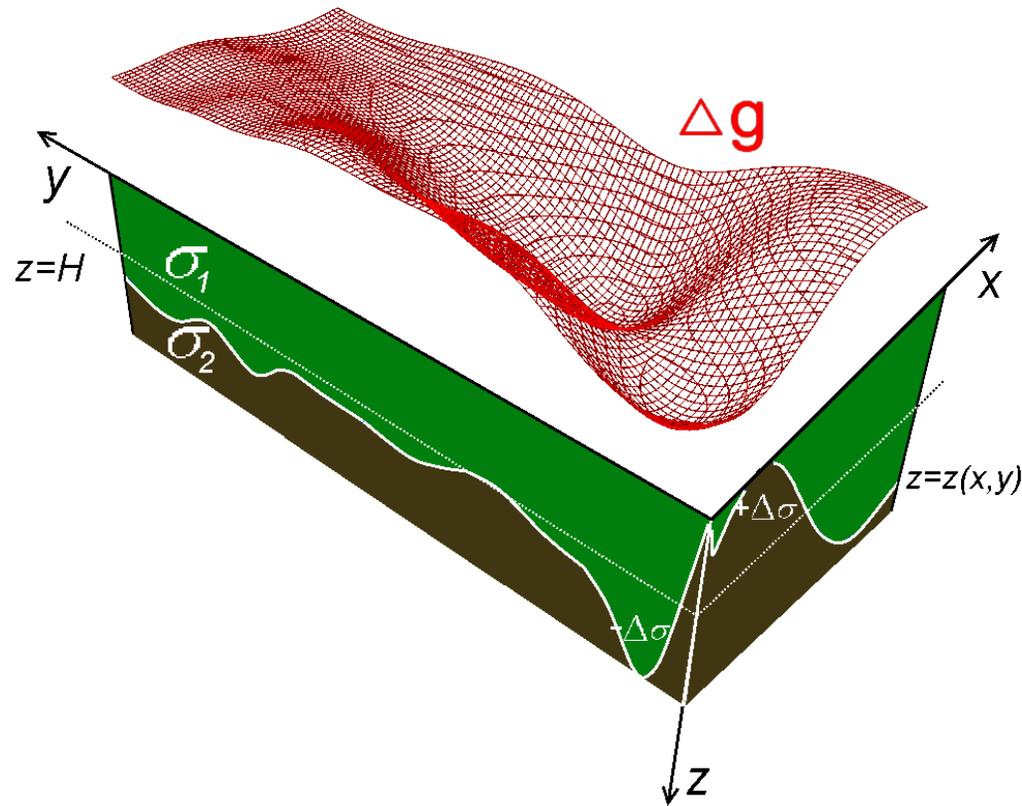
Итоговое ускорение в 247 раз  
(вместо 5 часов — 1 минута).

Экономия памяти в 65536 раз  
(вместо 512 ГБ — 8 МБ).

# СТРУКТУРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из двух слоев постоянной плотности, разделенных искомой поверхностью.

Плоскость  $xOy$  совпадает с дневной поверхностью, ось  $Z$  направлена вниз.



Модель двуслойной среды

Пусть поверхность раздела задается функцией  $z = z(x, y)$ ,  $\Delta\sigma$  — разность плотностей слоев.

Поверхность имеет горизонт. асимпт. плоск.  $z = H, \lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z(x, y) - H| = 0.$

$$A(z) \equiv f\Delta\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2(x,y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2}} \right) dx' dy' = \Delta g(x, y, 0),$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,

$\Delta g(x, y, 0)$  — аномальное гравитационное поле, измеренное на земной поверхности,

$H$  — глубина залегания асимптотической плоскости.

После дискретизации уравнения на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть, и аппроксимации интегрального оператора  $A(z)$  по квадратурным формулам имеем вектор правой части  $F$  размерности  $n$ , вектор решения  $Z$  размерности  $n$  и систему нелинейных уравнений  $A_n[z] = F_n.$

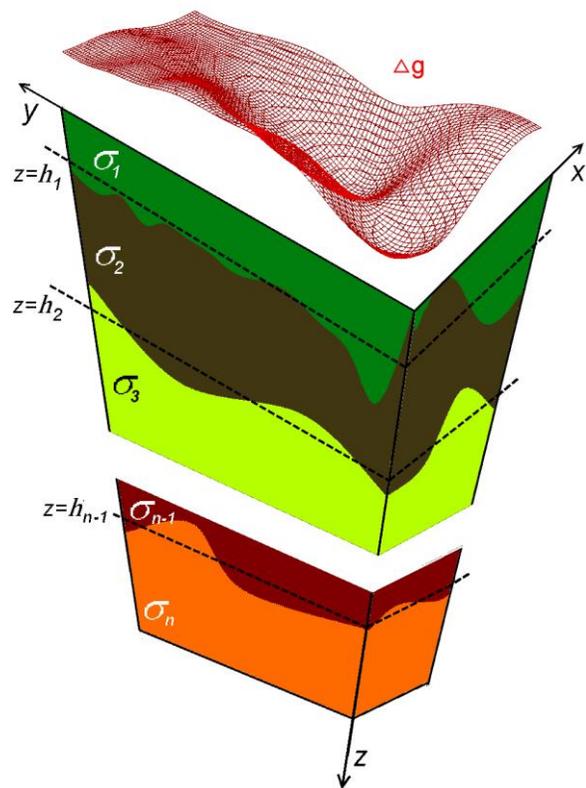
---

Нумеров Б. В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности. ДАН СССР 21. 1930. с. 569-574.

# СТРУКТУРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности, разделенных искомой поверхностью.

Плоскость  $xOy$  совпадает с земной поверхностью, ось  $Oz$  направлена вниз.



Модель многослойной среды (гравиметрия)

## Уравнение для случая многослойной среды

Гравит. эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела.

Пусть поверхности раздела задаются урав.  $z_l = z_l(x, y)$ ,  $\Delta\sigma_l$  – скачки плотности, горизонт. асимпт. плоск.  $z_l = H_l$ ,  $\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z_l(x, y) - H_l| = 0$ .

$$A(z) \equiv f \sum_{l=1}^L \Delta\sigma_l \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2}} \right) dx dy = \Delta g(x', y', 0),$$

где  $L$  – число границ раздела,  $f$  – гравитац. постоянная,  $\Delta g(x, y) = \sum_{l=1}^L \Delta g_l$ .

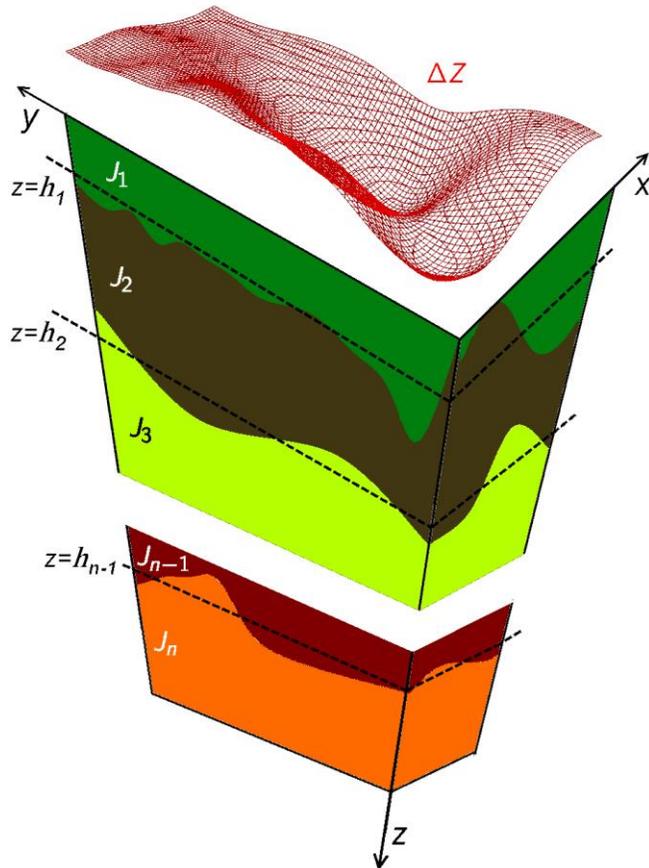
После дискретизации уравнения на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть, и аппроксимации интегрального оператора  $A(z)$  по квадратурным формулам имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности  $M \times N$ , результирующий вектор решения  $z(x, y) = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$  размерности  $L \times M \times N$ ,

матрицу производной оператора  $A'(z^k)^T$  размерности  $L \times M^2 \times N^2$  и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n.$$

# СТРУКТУРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА МАГНИТОМЕТРИИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной вертикальной намагниченности  $J_l$ ,  $l = 1, \dots, L + 1$  разделенных искомыми поверхностями  $\zeta_l$ .



$$\sum_{l=1}^L \frac{\Delta J_l}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\zeta_l(x_0, y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \zeta_l^2(x_0, y_0))^{3/2}} - \frac{H_l}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H_l^2)^{3/2}} \right] dx_0 dy_0 = \Delta Z(x, y, 0).$$

где  $\Delta J_l = J_l - J_{l+1}$  — разность намагниченности соседних слоев,

$\Delta Z(x, y, z)$  — вертикальная компонента напряженности магнитного поля.

# МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

## 1. Модифицированный метод наискорейшего спуска (мод. МНС)

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{\|S_\alpha^0(z^k)\|^2}{\|A'(z^0)S_\alpha^0(z^k)\|^2 + \alpha\|S_\alpha^0(z^k)\|^2} S_\alpha^0(z^k),$$

$$S_\alpha^0(z) = A'(z^0)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0),$$

где  $z^0$  — начальное приближение,  $z^k$  — приближенное решение на  $k$ -ой итерации,

$\alpha$  — параметр регуляризации,  $\psi$  — демпфирующий множитель,  
 $A'(z^k)$  — матрица производных конечномерной аппроксимации интегрального оператора в точке  $z^k$  размерностью  $MN \times MN$ .

В качестве условия останова используется  $\|A(z) - F\|/\|F\| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ .

**Идея** — не пересчитывать  $A'(z^k)$  на каждой итерации, а вычислить  $A'(z^0)$  один раз в фиксированной точке.

Метод является более экономичным по числу действий на каждой итерации и в результате требует меньше время для достижения той же точности, чем немодифицированный вариант.

## 2. Линеаризованный метод сопряженных градиентов (лин. МСГ)

$$\begin{aligned}z^{k+1} &= z^k - \psi \frac{\langle p^k, S_\alpha(z^k) \rangle}{\|A'(z^k)p^k\|^2 + \alpha \|p^k\|^2} p^k, \\p^k &= S_\alpha(z^k) + \beta^k p^{k-1}, \\p_0 &= S_\alpha(z^0), \\ \beta_k &= \max \left\{ \frac{\langle S_\alpha(z^k), (S_\alpha(z^k) - S_\alpha(z^{k-1})) \rangle}{\|S_\alpha(z^{k-1})\|^2}, 0 \right\}, \\S_\alpha(z) &= A'(z)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0),\end{aligned}$$

где  $z^0$  — начальное приближение,  $z^k$  — приближенное решение на  $k$ -той итерации,  $\psi$  — демпфирующий множитель,  $\alpha$  — параметр регуляризации.

Линеаризованный метод построен по аналогии с методом наискорейшего спуска.

Условие останова  $\|A(z) - F\|/\|F\| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ .

### 3. Модифицированный метод сопряженных градиентов (мод. лин. МСГ)

$$\begin{aligned}z^{k+1} &= z^k - \psi \frac{\langle p^k, S_\alpha^0(z^k) \rangle}{\|A'(z^0)p^k\|^2 + \alpha \|p^k\|^2} p^k, \\p^k &= S_\alpha^0(z^k) + \beta^k p^{k-1}, \\p^0 &= S_\alpha^0(z^0), \\ \beta^k &= \max \left\{ \frac{\langle S_\alpha^0(z^k), (S_\alpha^0(z^k) - S_\alpha^0(z^{k-1})) \rangle}{\|S_\alpha^0(z^{k-1})\|^2}, 0 \right\}, \\S_\alpha^0(z) &= A'(z^0)^T (A(z) - F) + \alpha(z - z^0).\end{aligned}$$

Матрица производных интегрального оператора вычисляется в начальной точке и не пересчитывается в дальнейшем процессе.

## Модифицированный метод сопряженных градиентов с весовыми множителями (для случая нескольких поверхностей)

$$\begin{aligned}
 z^{k+1} &= z^k - \psi \frac{\langle p^k, S_0(z^k) \rangle}{\|A'(z^0)p^k\|} p^k, \\
 p^k &= v^k + \beta^k p^{k-1}, \\
 p^0 &= v^0, v^0 = \Lambda S_0(z^k), \\
 \beta^k &= \max \left\{ 0, \frac{\langle v^k, v^k - v^{k-1} \rangle}{\|v^{k-1}\|^2} \right\}, \\
 S_0(z) &= A'(z^0)(A(z) - F),
 \end{aligned}$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей.

$$\Lambda = [F_1, F_2, \dots, F_L] = (f_1, f_2, \dots, f_{M \times N}, \dots, f_{L \times M \times N}) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \times M \times N}), \quad \gamma_i = \alpha \frac{|f_i|^\beta}{\max_i |f_i|^\beta} \in [0, \alpha], \quad \beta > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (*)$$

$F_l (l = 1, \dots, L)$  — аномальные поля, образованные гравитационными либо магнитными объектами, расположенными между глубинами  $H_l, H_{l+1}$  для поверхностей раздела  $\zeta_l$ .

---

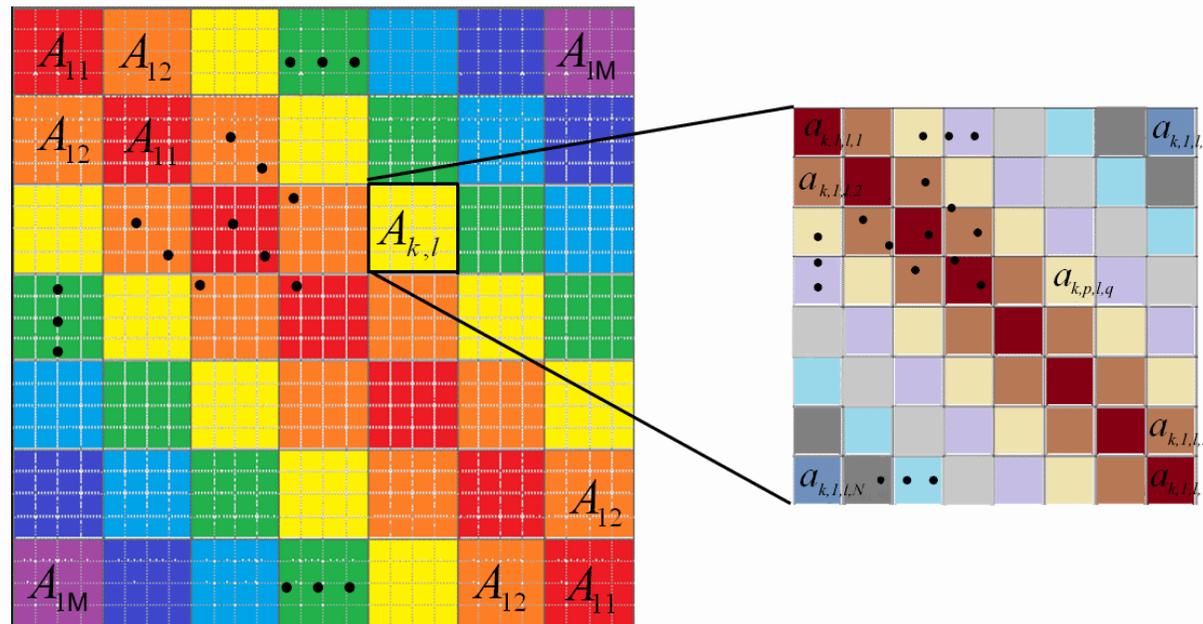
Акимова Е.Н., Мартышко П.С., Мисиллов В.Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // ДАН. 2013.

Мартышко П. С., Акимова Е. Н., Мисиллов В. Е. О решении структурной обратной задачи гравиметрии модифицированными методами градиентного типа // Физика Земли. 2016. №. 5. С. 82-86.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МАТРИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ: ТЕПЛИЦЕВО-БЛОЧНО-ТЕПЛИЦЕВА МАТРИЦА

Для модифицированных методов на каждой итерации используется матрица  $A'(z^0)$ , которая является теплицево-блочно-теплицевой при  $z^0 = \text{const}(H)$ .

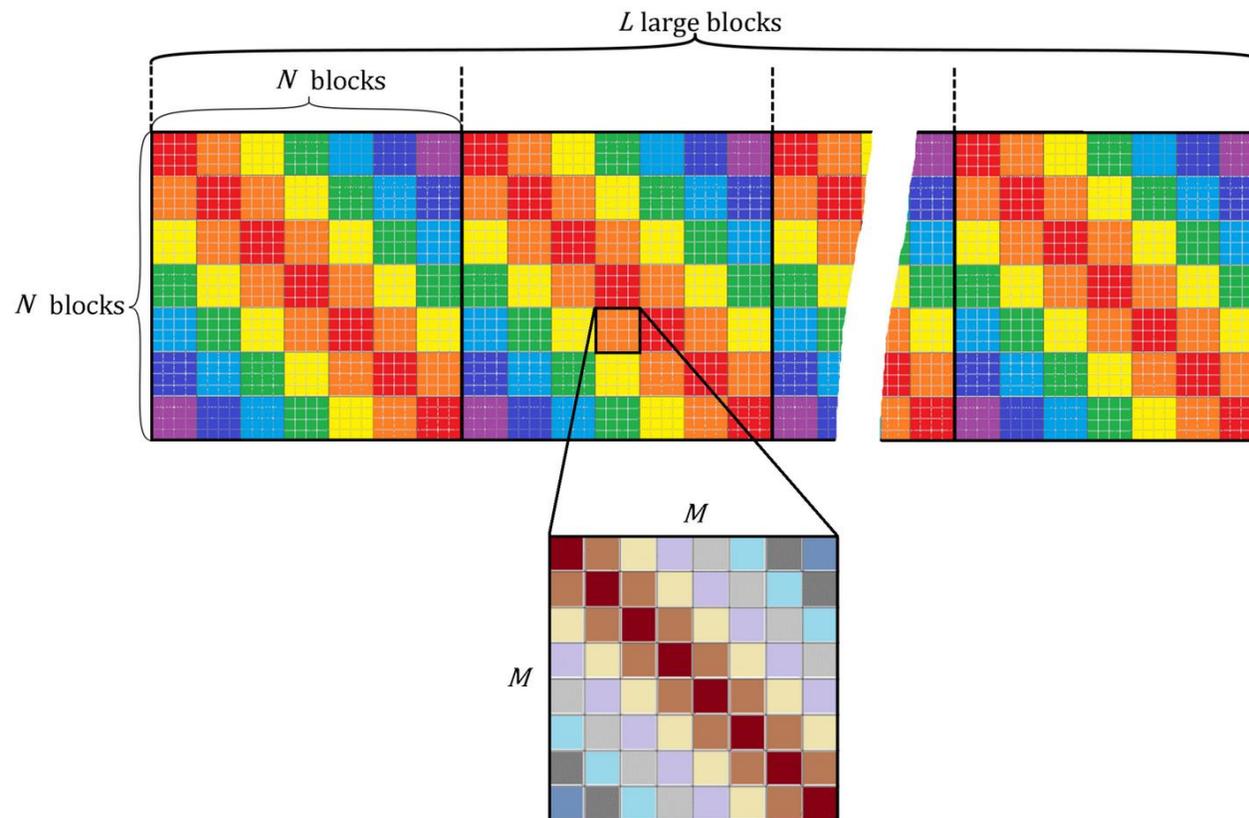
$$a_{i,j,u,v} = a_{(j-1)M+i,(v-1)M+u} = f\Delta\sigma\Delta x\Delta y \frac{-z^0}{\left((x_u - x_i)^2 + (y_v - y_j)^2 + (z^0)^2\right)^{3/2}},$$



Структура блочно-теплицевой матрицы для случая одной поверхности

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МАТРИЦЫ ПРОИЗВОДНЫХ: ТЕПЛИЦЕВО-БЛОЧНО-ТЕПЛИЦЕВА МАТРИЦА

Для модифицированных методов на каждой итерации используется прямоугольная матрица  $A'(z^0)$ , составленная из квадратных теплицево-блочных-теплицевых блоков при  $z^0 = \text{const}(H_l)$ .



# ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ НА МНОГОЯДЕРНЫХ И ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

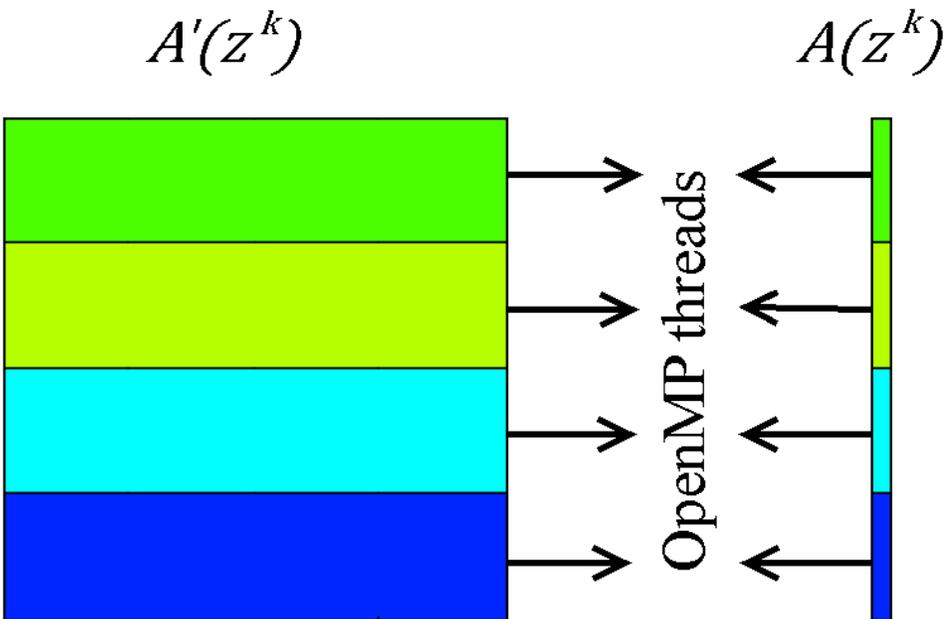


Схема вычислений для OpenMP и CUDA.  
Матрица производных и вектор значения  
интегрального оператора разбиваются на фрагменты.  
Вектор решения не разбивается.

Алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии на основе градиентных методов численно реализованы на суперкомпьютере кластерного типа «Уран».

Алгоритмы реализованы на многоядерном процессоре с помощью технологии OpenMP и на видеоускорителях NVIDIA Tesla с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS.

Для сетки  $512 \times 512$  хранение матрицы производных требует 512 Гб. Поэтому элементы матрицы производной оператора вычисляются **«на лету»** во время выполнения векторно-матричных операций.

Используется способ **автоматической настройки параметров** выполнения подпрограмм на GPU: найден оптимальный размер блока для эталонного размера сетки  $256 \times 256$ , для другого размера сетки параметры пропорционально пересчитываются.



# МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ВОССТАНОВЛЕНИИ ТРЕХ ГРАНИЦ ПО КВАЗИМОДЕЛЬНЫМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ДАННЫМ

Область: 600 × 600 км, район Среднего Урала.

Асимптотические плоскости  $H_1 = 10, H_2 = 20, H_3 = 30$  км

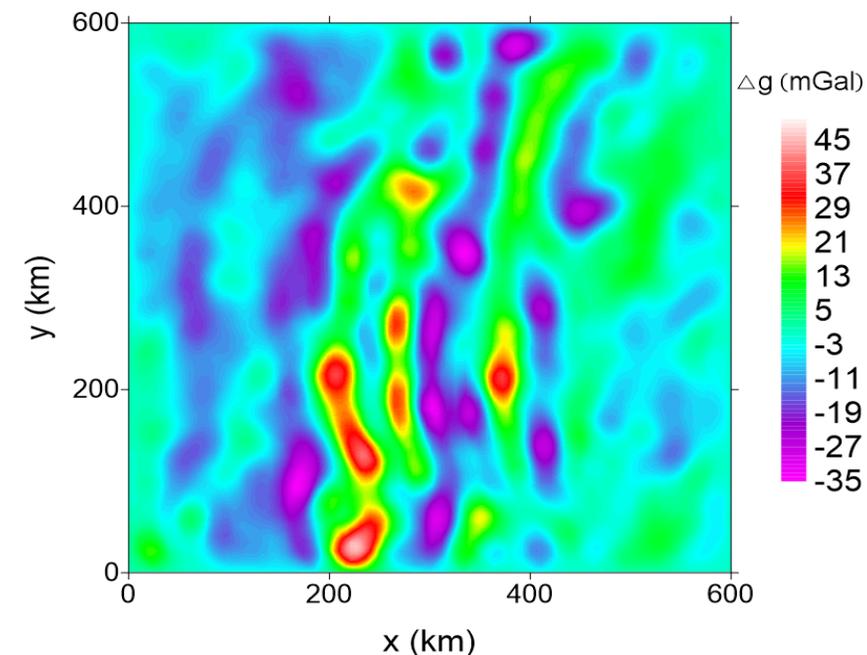
Скачки плотности  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.2 \text{ g/cm}^3$

Размер сетки 512 × 512

Размерность матрицы производных 16384 × 49152

Критерий останова  $\varepsilon = 0.1$

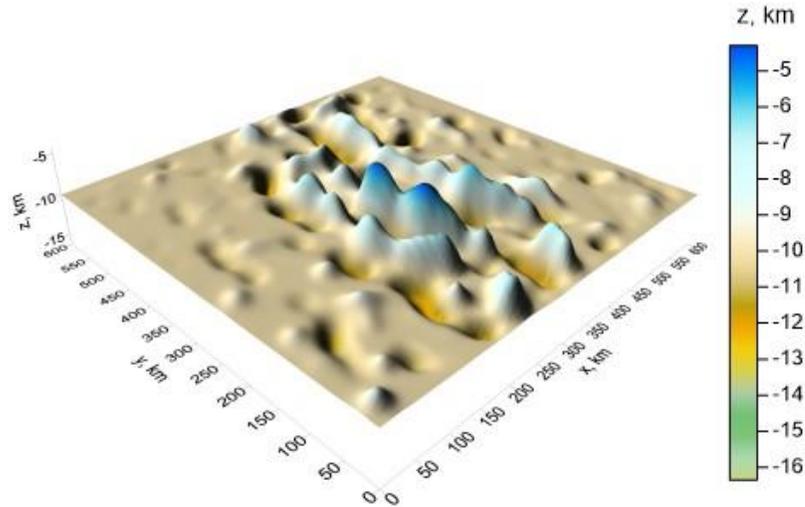
Число итераций 12.



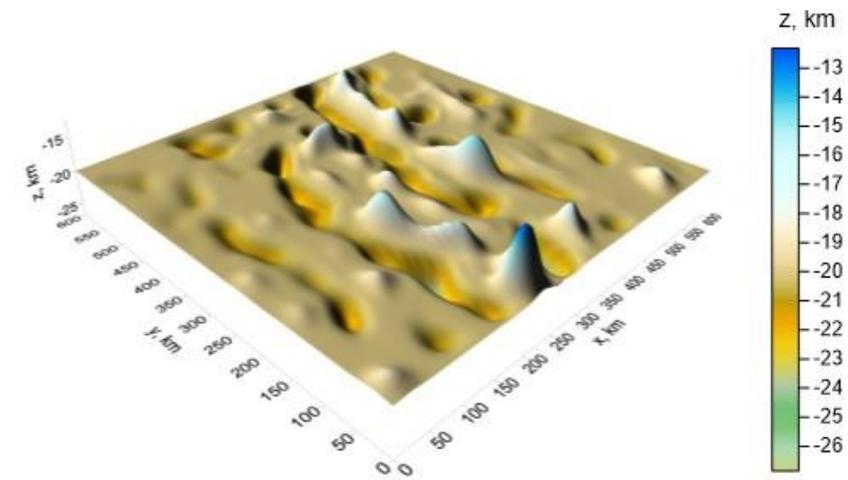
Суммарное гравитационное поле

# МОДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

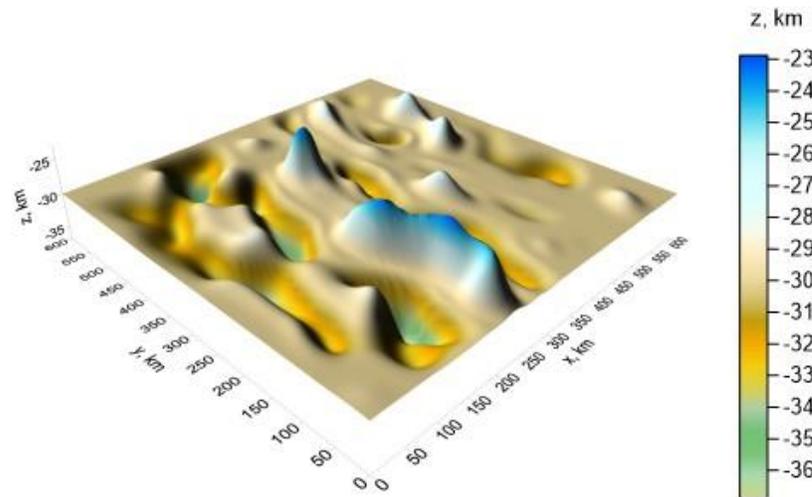
(на основе карт гравитационных аномалий)



$H_1 = 10$  km

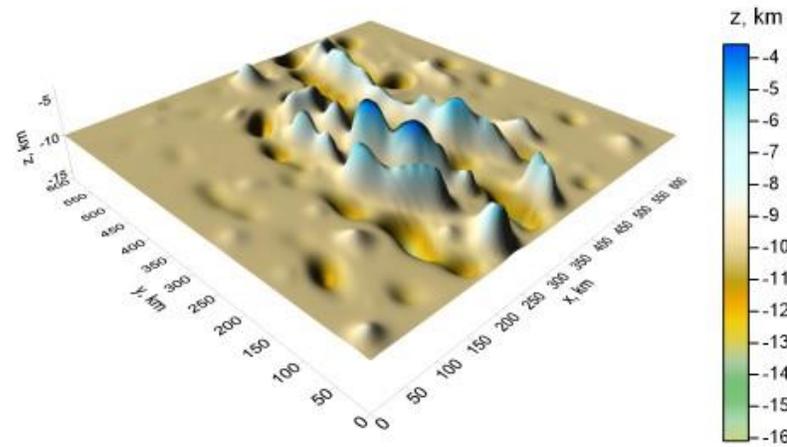


$H_2 = 20$  km

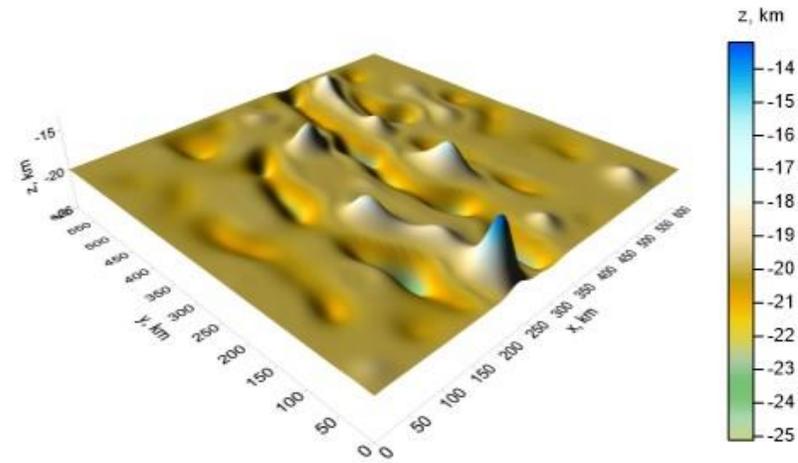


$H_3 = 30$  km

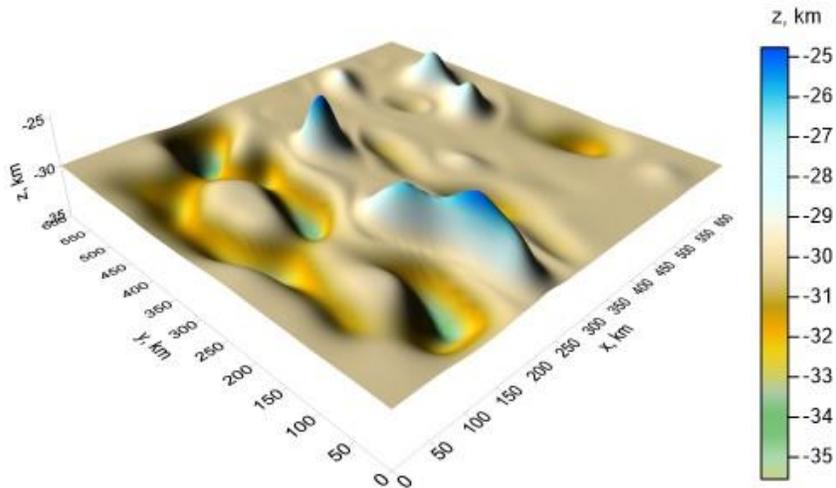
# ВОССТАНОВЛЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ



$H_1 = 10$  km



$H_2 = 20$  km



$H_3 = 30$  km

Относительные погрешности  
 $\|z_l - z_l^*\| / \|z_l^*\| < 0.01$



# РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

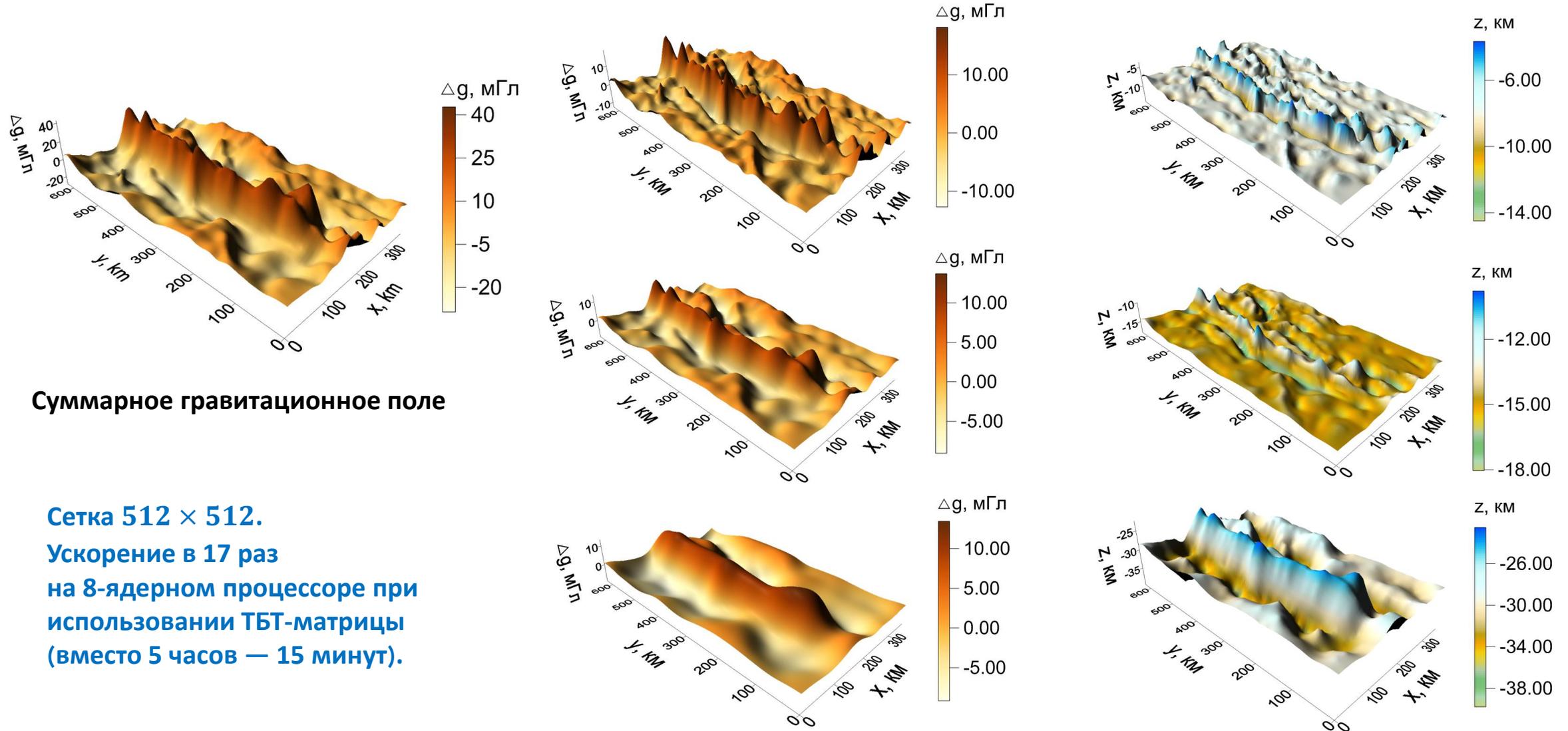
Алгоритм	Вычислитель	Время счета $T_m$	Ускорение $S_m = T_1/T_m$	Эффективность $E_m = S_m/m$	
МСГ с весовыми множителями	Intel Xeon E5-2650	1 поток	14.7 ч.	—	—
		2 потока	7.7 ч.	1.78	0.89
		4 потока	4.2 ч.	3.29	0.82
		8 потоков	2.9 ч.	4.7	0.58
	NVIDIA Tesla M2090	1 x GPU	12 мин.	68	
		8 x GPU	1.7 мин.	510 (7.5)	
мод. МСГ с весовыми множителями (ТБТ-матрица)	Intel Xeon E5-2650	1 поток	7.5 ч.	—	—
		8 потоков	1 ч.	7.5	0.93
	NVIDIA Tesla M2090	1 x GPU	5.3 мин.	85	
		8 x GPU	0.7 мин.	610 (7.17)	

Время счета уменьшилось в 500 раз — с 14.7 часов до 1.7 минут — при использовании графических процессоров. Модифицированный метод уменьшает время счета в 2 раза.

# ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ (СРЕДНИЙ УРАЛ)



## Нахождение поверхностей раздела сред



Суммарное гравитационное поле

Сетка  $512 \times 512$ .  
Ускорение в 17 раз  
на 8-ядерном процессоре при  
использовании ТБТ-матрицы  
(вместо 5 часов — 15 минут).

Разделенные гравитационные поля

Поверхности раздела

# СИСТЕМА УДАЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ (ВЕБ-ПОРТАЛ)



Специализированный Веб-портал решения задач на многоядерных вычислителях



Вы зашли как s0150  
[Выход](#)

[Общая информация о сервере](#)

[Интерфейс пользователя](#)

[Виды задач и методы решения](#)

[Новая задача](#)

[Запущенные задачи](#)

[Контактная информация](#)

Для того чтобы следить за ходом выполнения задачи, в левом столбце таблицы выберите номер нужной задачи, а в правом столбце периодически нажимайте кнопку "Выбрать".

Статус задач: Все

Тип задач: Все

ID задачи	ID типа задачи	Число узлов	Макс. время, мин.	Дата создания	Статус	Выбор	Delete
648	6	1	1	12/26/2011 6:52:00 PM	1	<input type="button" value="Выбрать"/>	<input type="button" value="Delete"/>
647	4	1	5	12/26/2011 6:37:00 AM	1	<input type="button" value="Выбрать"/>	<input type="button" value="Delete"/>
605	3	20	5	12/13/2011 11:21:00 AM	1	<input type="button" value="Выбрать"/>	<input type="button" value="Delete"/>

1 2 3 4 5 6 7 8

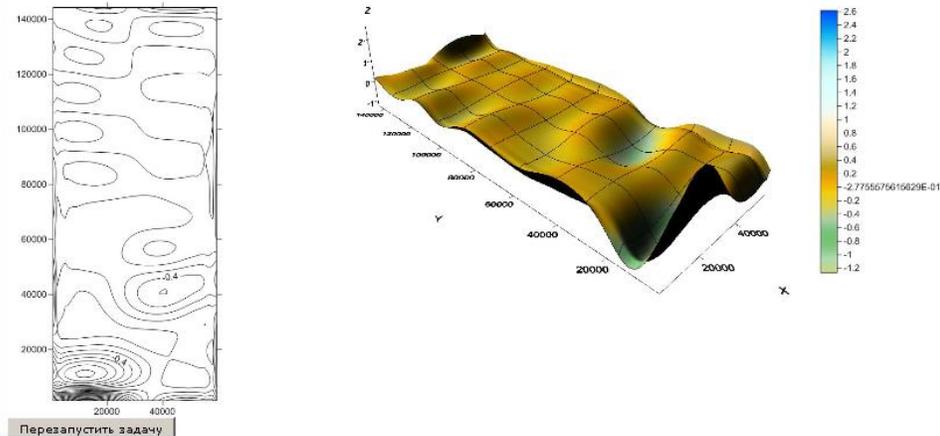
Число строк в таблице: 3

Задача	648. Линейная задача гравиметрии
Метод	Метод минимальных невязок
Число узлов	1
Макс. время выполнения, мин.	1
Дата создания	12/26/2011 6:52:00 PM
Статус	Задача решена
Устройство	GPU NVIDIA Tesla S2050

Время выполнения задачи, сек.: 15.42

Выходные файлы:

№	Описание	Файлы
1	относительная норма невязки	out-648_0.dat
2	данные для Surfer	out-648_1.dat



Предназначена для запуска программ на МВС (Уран) через **веб-интерфейс** по интернету.

Пользователь выбирает тип задачи, метод решения, вид вычислителя, загружает данные и получает результаты (SURFER) и время счета.

- линейная обратная задача гравиметрии о восстановлении плотности в горизонтальном или криволинейном слое
- линейная обратная задача магнитометрии о восстановлении переменной намагниченности в прямоугольном параллелепипеде
- структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхности раздела сред для модели двухслойной или многослойной среды
- структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхности раздела для моделей двухслойной и многослойной среды

# СТРУКТУРА ВЕБ-ПОРТАЛА



Веб-интерфейс — разработан с использованием технологии Blazor. Blazor — перспективная технология, позволяющая писать код для браузера на языке C#. Общение с серверной частью происходит по протоколу http.

Серверная часть — использует ASP.NET и язык C#, для взаимодействия с базой данных используется Microsoft Entity Framework (EF) Core.

СУБД — может использоваться любая реляционная СУБД, совместимая с EF Core.



На основе вышеописанных методов для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии разработаны алгоритмы для графических ускорителей, входящие в состав комплекса программ. Алгоритмы встроены в систему удаленных вычислений.

Описание входных и выходных данных, а также рекомендации по использованию также загружены на веб-портал. Для запуска задачи необходимо загрузить файл с аномальным полем, указать глубину и количество графических ускорителей. После окончания работы программы на выходе будет файл с восстановленной поверхностью и ее изображение.

На данный момент в системе удаленных вычислений доступны следующие методы, реализованные для графических ускорителей:

## **Задача гравиметрии для одной границы:**

- регуляризованный линейризованный МСГ;
- модифицированный регуляризованный линейризованный МСГ;
- гибридный МСГ;
- линейризованный МНС;
- покомпонентный градиентный метод;
- модифицированные альфа процессы.

## **Задача гравиметрии для нескольких границ:**

- линейризованный МСГ с весовыми множителями;
- модифицированный МСГ с весовыми множителями.

## **Задача магнитометрии для одной границы:**

- регуляризованный линейризованный МСГ;
- покомпонентный градиентный метод;
- модифицированный покомпонентный градиентный метод;
- линейризованный МНС;
- модифицированный МНС.

## **Задача магнитометрии для нескольких границ:**

- линейризованный МСГ с весовыми множителями.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ



По результатам исследований опубликовано большое количество работ в ведущих научных изданиях (Scopus, WoS). Программы, входящие в комплекс, зарегистрированы в РОСРИД и Роспатенте. Результаты работы докладывались на международных научных конференциях.

Представленный программный комплекс для решения геофизических задач может быть использован в составе программных пакетов, предназначенных для геофизических исследований.

Потенциальными пользователями комплекса являются институты УрО и СО РАН (ИГФ, ИНГГ, ГИ), организации газонефтяной отрасли.

Авторам присуждена премия Губернатора Свердловской области в сфере информационных технологий «За выдающийся вклад в развитие научных исследований в сфере информационных технологий».

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!



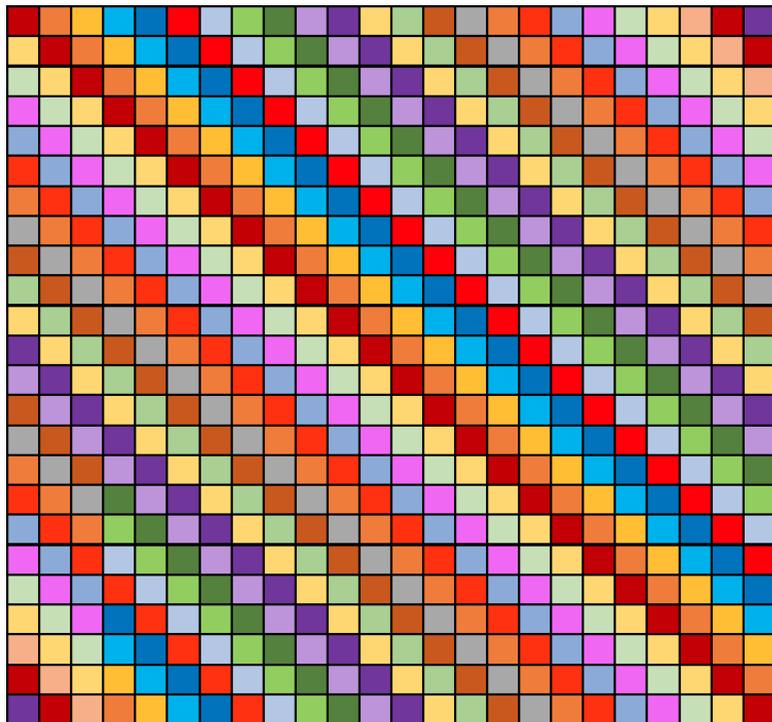
**Ural Federal  
University**

named after the first President  
of Russia B.N.Yeltsin



# ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ

Теплицева матрица — матрица, в которой на всех диагоналях, параллельных главной, стоят равные элементы.



При разработке алгоритмов решения линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии замечено, что после дискретизации области на равномерной сетке и аппроксимации интегральных операторов задачи сводятся к СЛАУ с теплицево-блочными матрицами (ТБТ).

При разработке алгоритмов решения нелинейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии замечено, что матрица производных конечномерной аппроксимации интегрального оператора также имеет вид ТБТ при использовании итерационных методов определенного типа.

Данный раздел доклада посвящен построению алгоритмов с использованием структуры ТБТ матрицы.

# Условия сходимости для градиентных методов

Модифицированный метод наискорейшего спуска (мод. МНС)  
Модифицированный метод сопряженных градиентов (мод. лин. МСГ)

$$\|A'(z)\| \leq N_1, \quad \|A'(z) - A'(\check{z})\| \leq N_2 \|z - \check{z}\|,$$

где  $z, \check{z} \in S_\rho(z_\alpha)$ ,  $z_\alpha$  — решение регуляризованного уравнения.

## Модифицированные $\alpha$ -процессы

Матрица  $A'(z^0)$  симметрична, имеет некрратные, неотрицательные и различные собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1..n$ ).

---

В. В. Васин. Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных нерегулярных операторных уравнений. Доклады Академии наук. Т. 462. № 3, с. 264-268. 2015.

В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина. Двухэтапный метод построения регуляризирующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач. Труды ИММ УрО РАН. Т. 23, №1, с. 57–74. 2017.