Международная конференция «Суперкомпьютерные дни в России» (Москва, 25 - 26 сентября 2023 г.)

О новом подходе к решению нестационарных задач линейного программирования на кластерных вычислительных системах

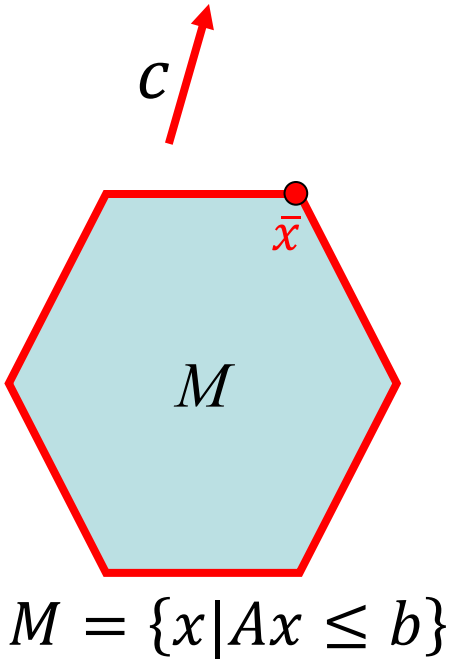
д.ф.-м.н., Л.Б. Соколинский,
к.ф.-м.н., И.М. Соколинская

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00356)

Задача линейного программирования (ЛП)

$$\bar{x} = \arg\max\{f(x)|Ax \leq b\}$$



- $x \in \mathbb{R}_n$
- A – матрица $m \times n$
- c, b – векторы размерности n
- $f(x) = \langle c, x \rangle$ – целевая функция
- $\langle c, x \rangle$ – скалярное произведение

Нестационарные задачи ЛП

- Целевая функция и/или ограничения изменяются в течение вычислительного процесса
- Примеры
  - выбор оптимальных стратегий в роботрейдинге
  - оптимальное управление летательными аппаратами
  - оптимальное управление технологическими процессами
  - логистические и транспортные задачи
  - оперативное планирование и управление производством продукции

Оптимизация в режиме реального времени

- Управление химическим производством
- Управление системой многоточечного впрыска топлива в ДВС
- Управление сотовыми сетями
- Автопилотирование
- Системы самонаведения ракет

Режим реального времени

- Решение задачи ЛП должно выполняться за определенное время
- Методы решения
  - Рассматривать каждое изменение как появление новой задачи оптимизации, которую необходимо решать с нуля
  - Непрерывно адаптировать решение к изменяющейся среде, повторно используя информацию, полученную в прошлом
    - Подход применим, если алгоритм достаточно быстро отслеживает траекторию движения оптимальной точки
    - В случае больших задач ЛП требует разработки масштабируемых методов и параллельных алгоритмов ЛП

Решатели

- Симплекс-метод
- Метод внутренних точек

Симплекс-метод

- Плохо распараллеливается на распределенной памяти (не более 16-32 процессорных узлов)
- При решении задач больших размерностей наблюдается потеря точности
- При изменении исходных данных необходимо начинать вычислительный процесс заново

Метод внутренних точек

- Адаптируется к динамическим изменениям исходных данных задачи
- Отсутствуют эффективные параллельные реализации для систем с распределенной памятью
- Во многих случаях необходимо находить начальную внутреннюю точку

Идея

Разработать новый метод решения нестационарных задач ЛП в реальном времени с использование суперкомпьютерных и нейросетевых технологий

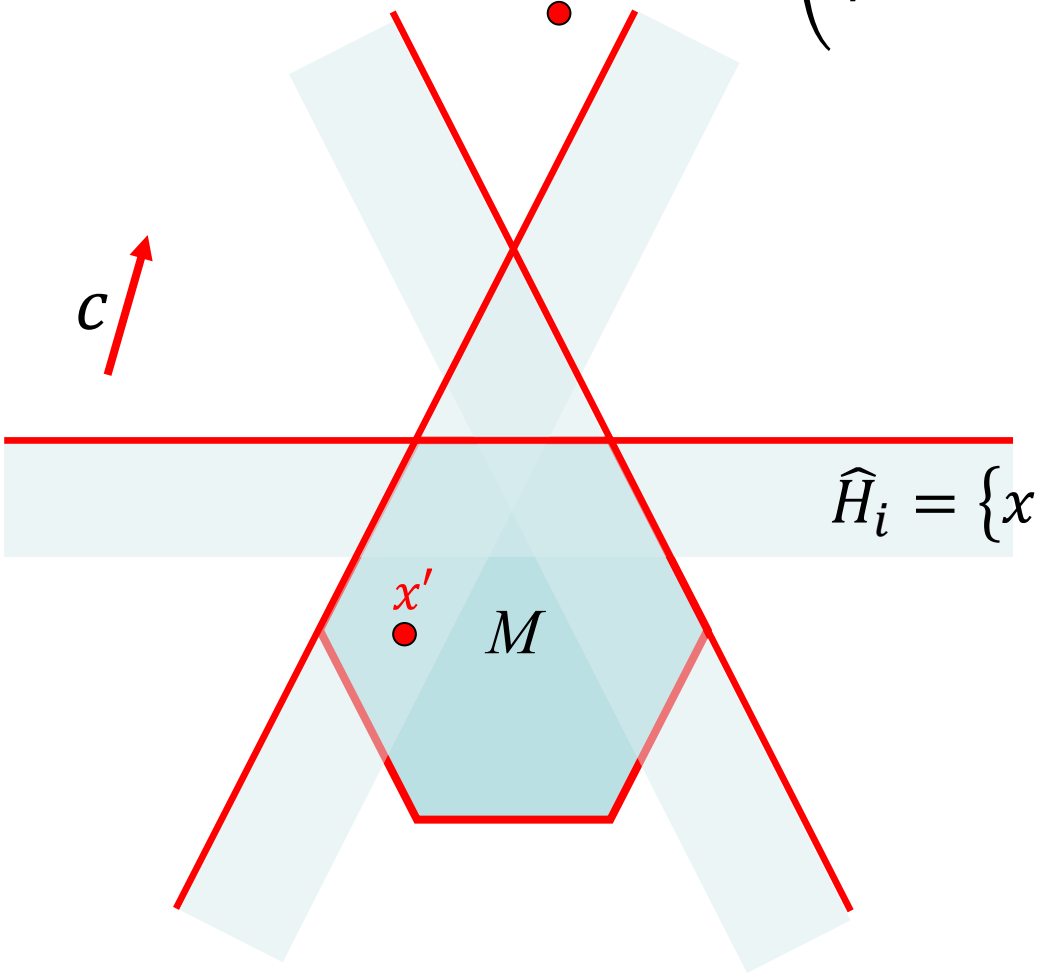
Метод поверхностного движения

1. Выбрать начальную точку u на поверхности многогранника
2. Вычислить на суперкомпьютере локальный образ допустимого многогранника в точке u
3. С помощью нейронной сети вычислить на поверхности многогранника направление d максимального увеличения $f(x)$
4. Двигаться по поверхности допустимого многогранника по направлению d так далеко, насколько это возможно
5. Полученную точку принять за новое приближение u и перейти на шаг 2
6. Закончить работу при $d = 0$

Выбор начальной точки: вычисление точки апекса

$$z = x' + \left(\eta + \max\left\{\frac{b_i - \langle a_i, x'\rangle}{\langle a_i, e_c\rangle}\middle| i \in \mathcal{I}\right\}\right) e_c$$

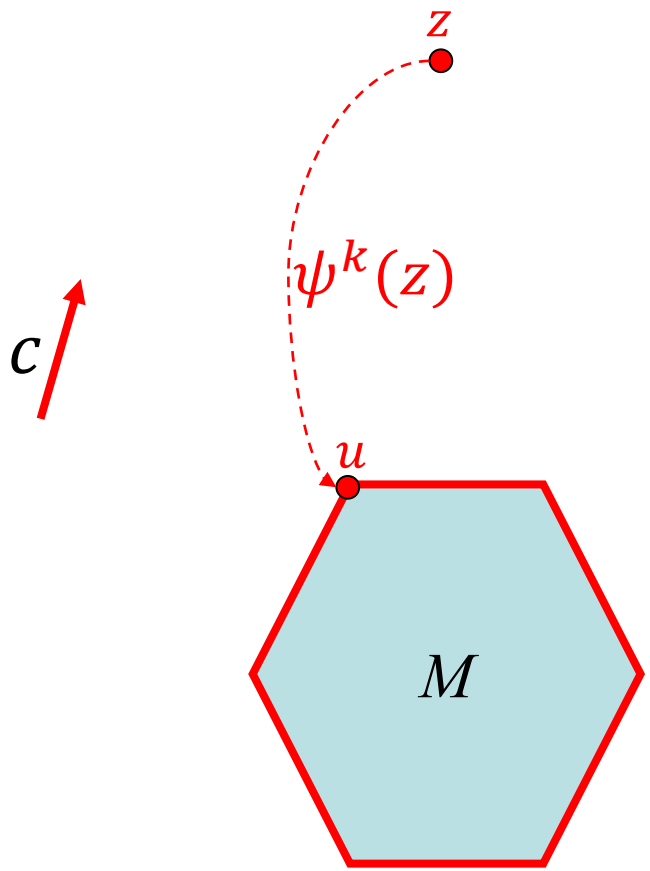
$$\eta > 0$$



$$\widehat{H}_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \langle a_i, x\rangle \le b_i\right\}$$

$$\langle a_i, c\rangle > 0$$

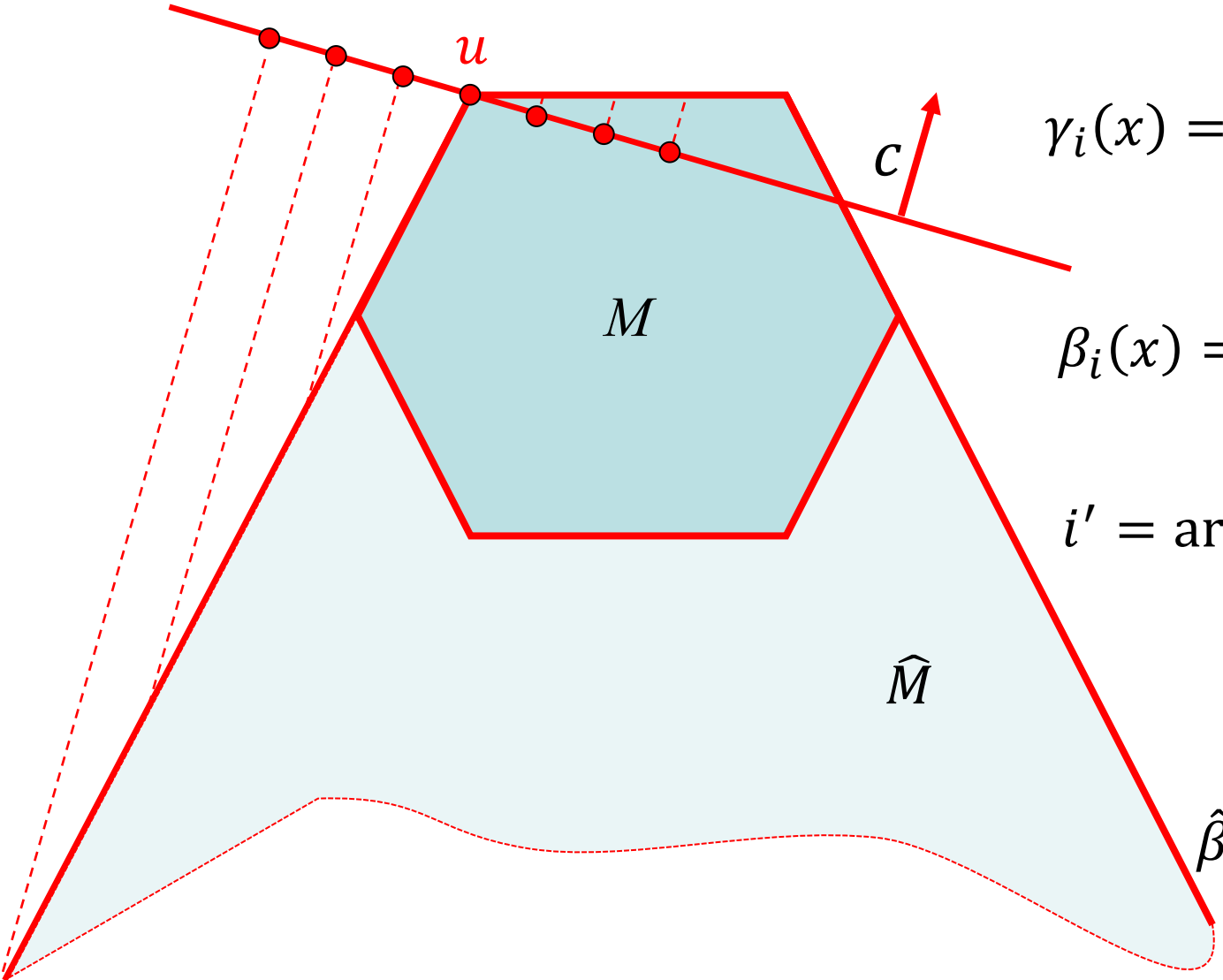
Выбор начальной точки: фейеровское отображение



$$\pi_i(x) = x - \frac{\langle a_i, x\rangle - b_i}{\|a_i\|^2} a_i$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in M \\ \dfrac{1}{|\mathcal{I}_x|} \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}_x} \pi_i(x), & \text{если } x \notin M \end{cases}$$

Построение локального образа



$$\gamma_i(x) = x - \frac{\langle a_i, x\rangle - b_i}{\langle a_i, c\rangle} c$$

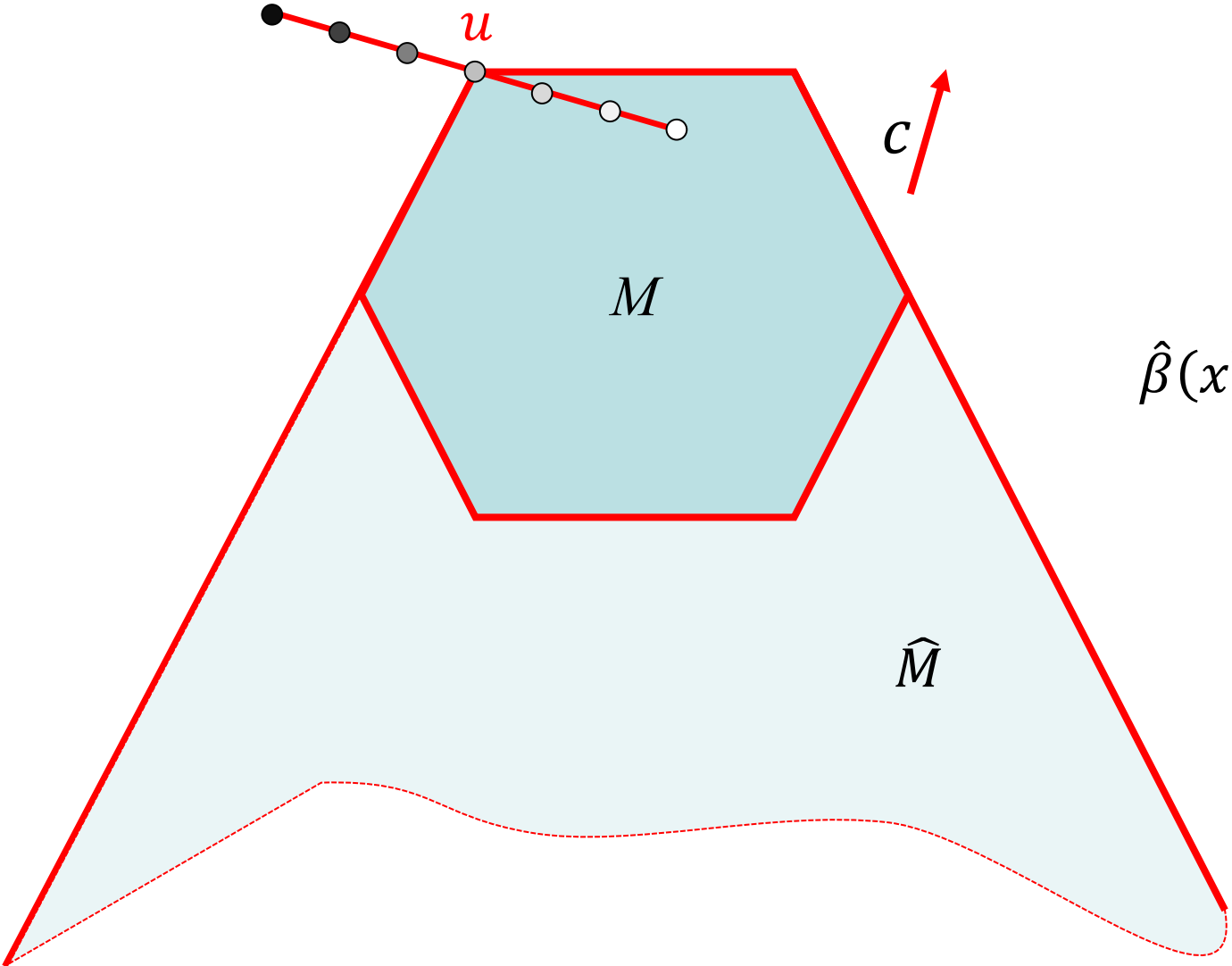
$$\beta_i(x) = -\frac{\langle a_i, x\rangle - b_i}{\langle a_i, c\rangle} \|c\|$$

$$i' = \operatorname{argmin}\{\beta_i(x) | i \in \mathcal{I}\}$$

$$\hat{\gamma}(x) = \gamma_{i'}(x)$$

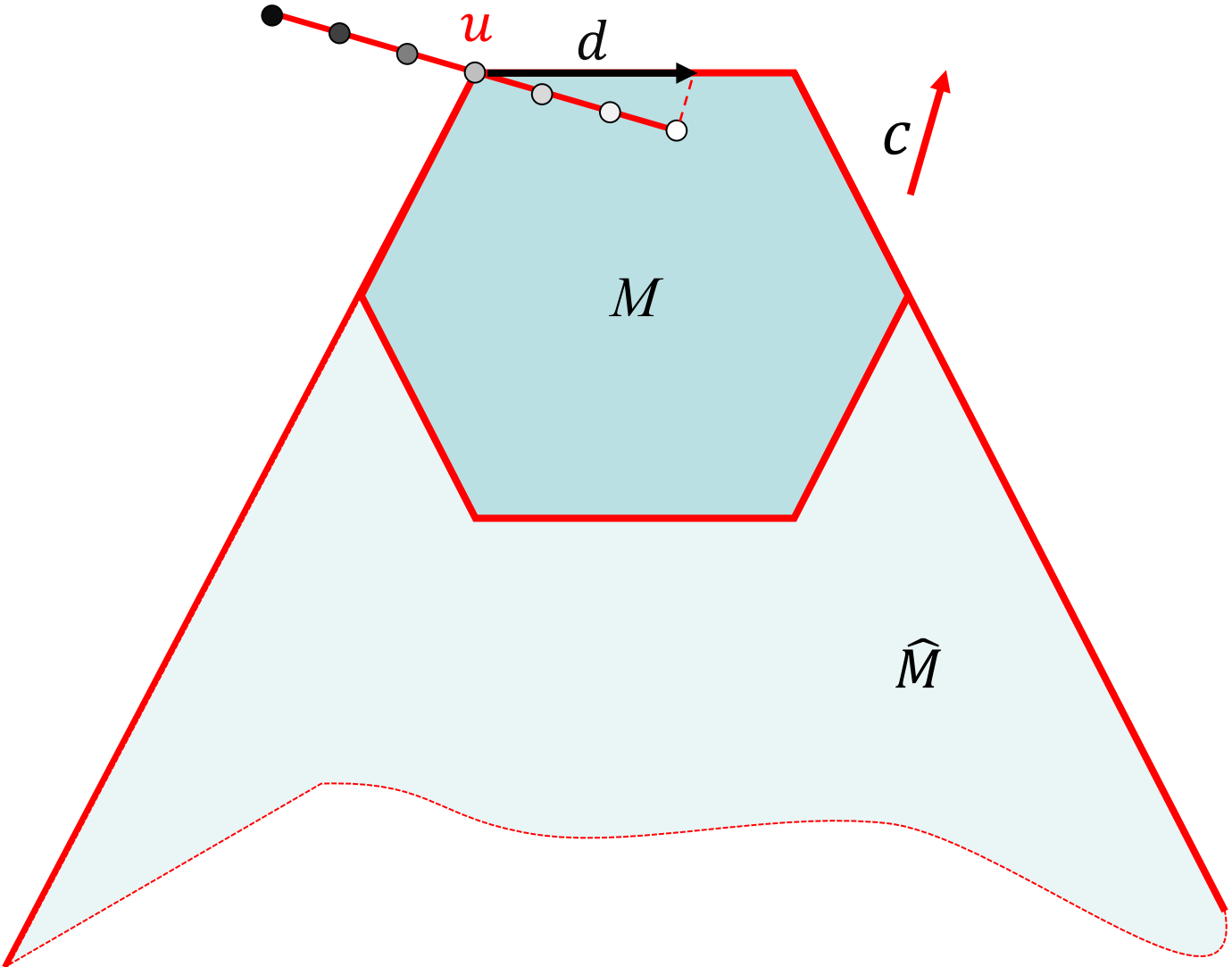
$$\hat{\beta}(x) = \frac{\langle c, \hat{\gamma}(x) - x\rangle}{\|c\|^2}$$

Локальный образ

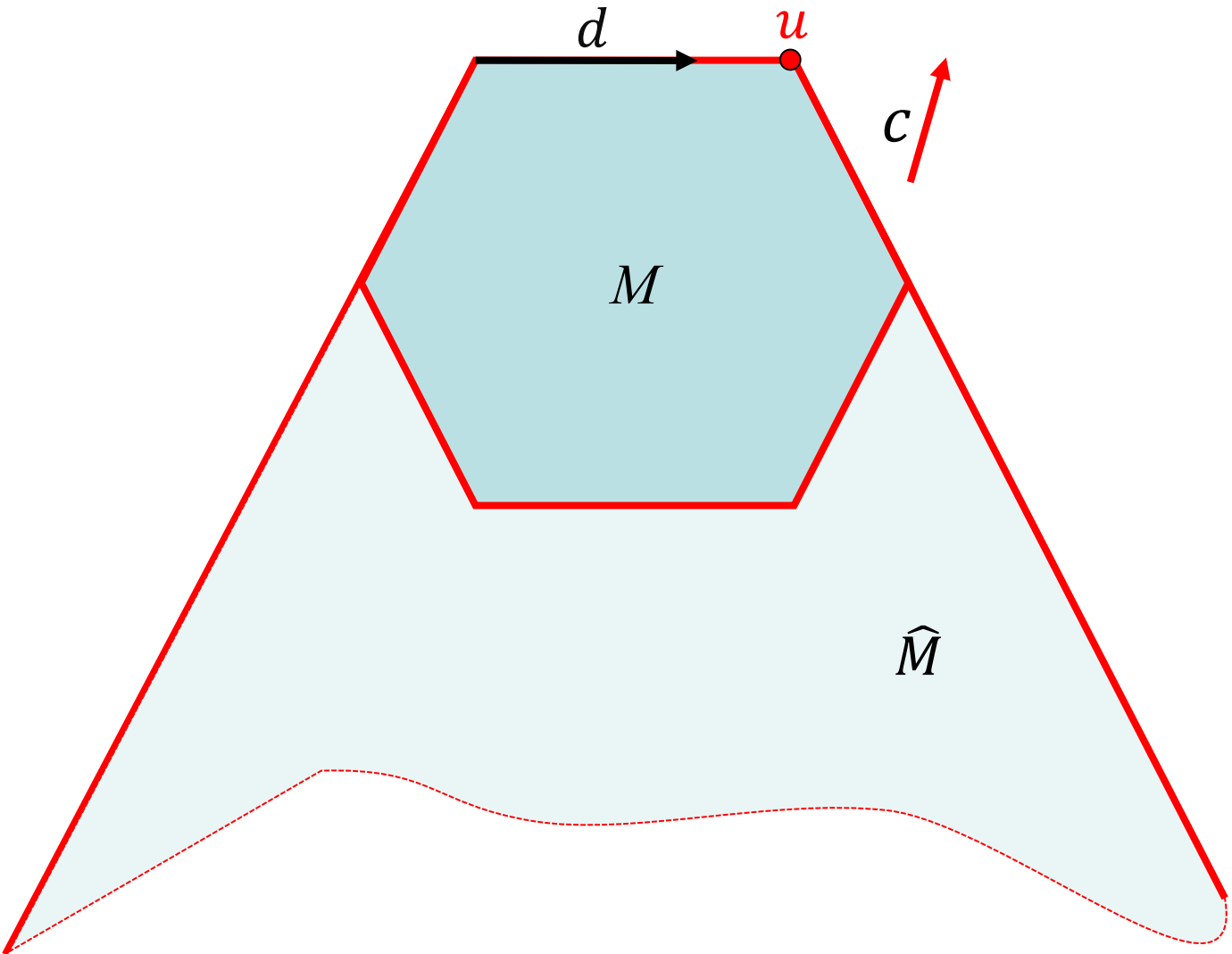


$$\hat{\beta}(x) = \frac{\langle c, \hat{\gamma}(x) - x \rangle}{\|c\|^2}$$

Нейронная сеть вычисляет направление движения



Получаем следующее приближение



Обучающее множество

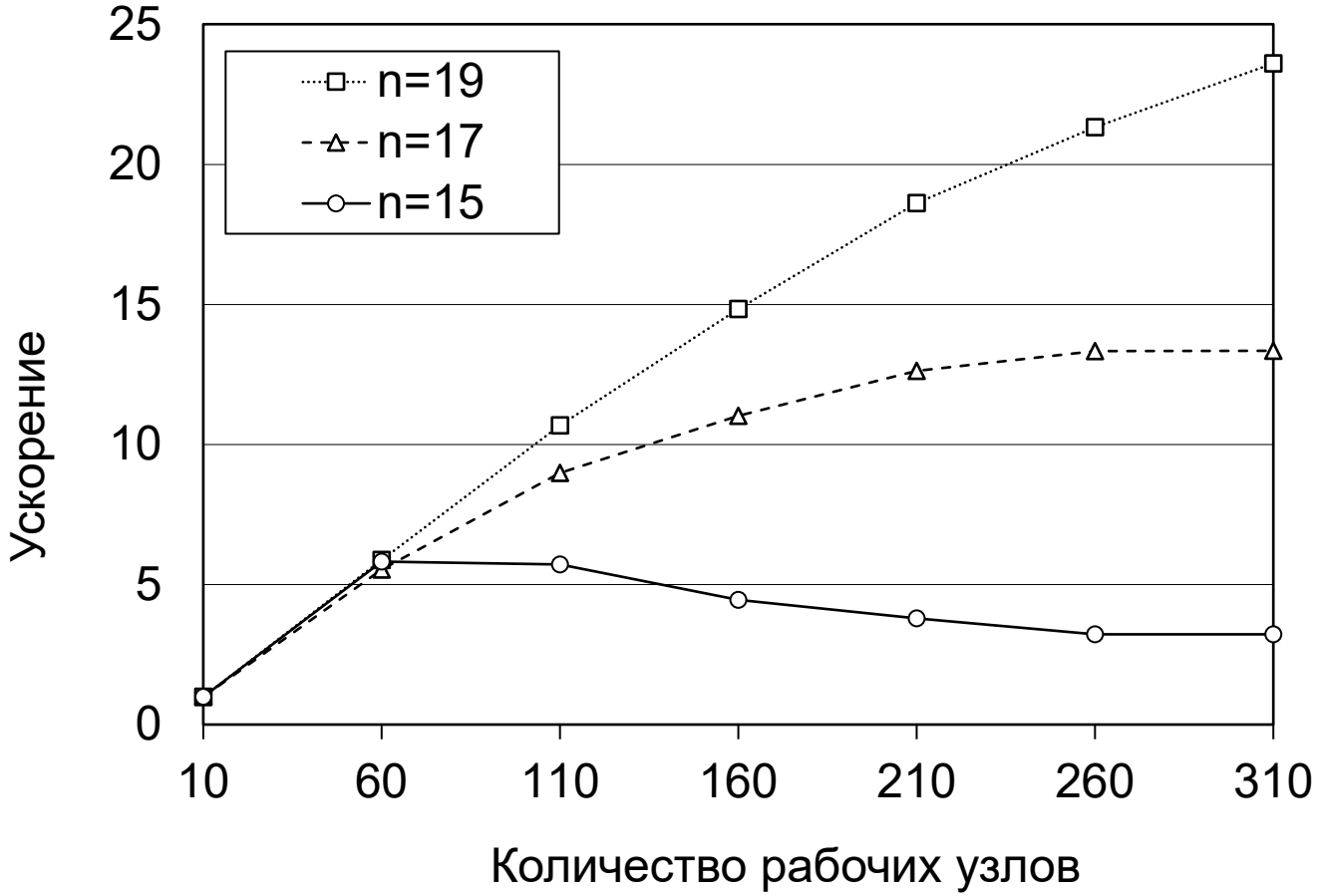
- Обучающее множество может быть построено с помощью апекс-метода

[Соколинский Л.Б., Соколинская И.М. О новой версии апекс-метода для решения задач линейного программирования // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2023. Т. 12, № 2. С. 5–46. DOI: https://doi.org/10.14529/cmse230201]

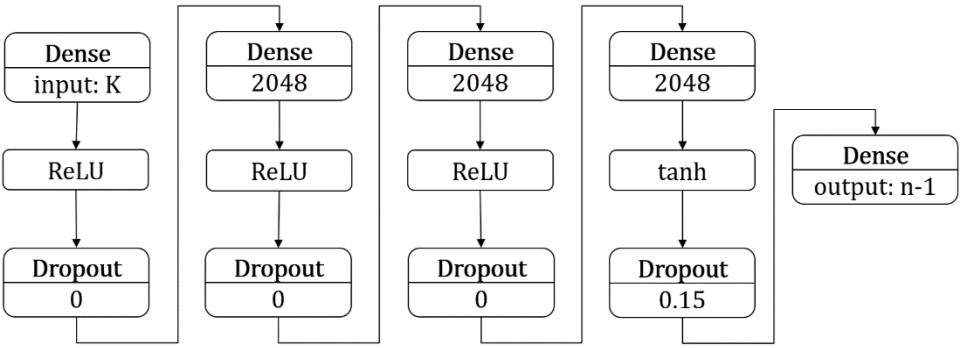
Суперкомпьютер «Торнадо ЮУрГУ»

Количество узлов:	**384**
Тип процессоров:	**2 x Intel Xeon X5680 (12 ядер по 3.33 ГГц; 2 потока на ядро)**
Оперативная память узла:	**24 Гб**
Тип сопроцессора:	**Intel Xeon Phi SE10X: (61 ядро по 1.1 ГГц; 4 потока на ядро)**
Память сопроцессора:	**8 Гб**
Тип системной сети:	**InfiniBand QDR**
Тип управляющей сети:	**Gigabit Ethernet**
Операционная система:	**Linux CentOS 6.2**

Построение локального образа задачи ЛП

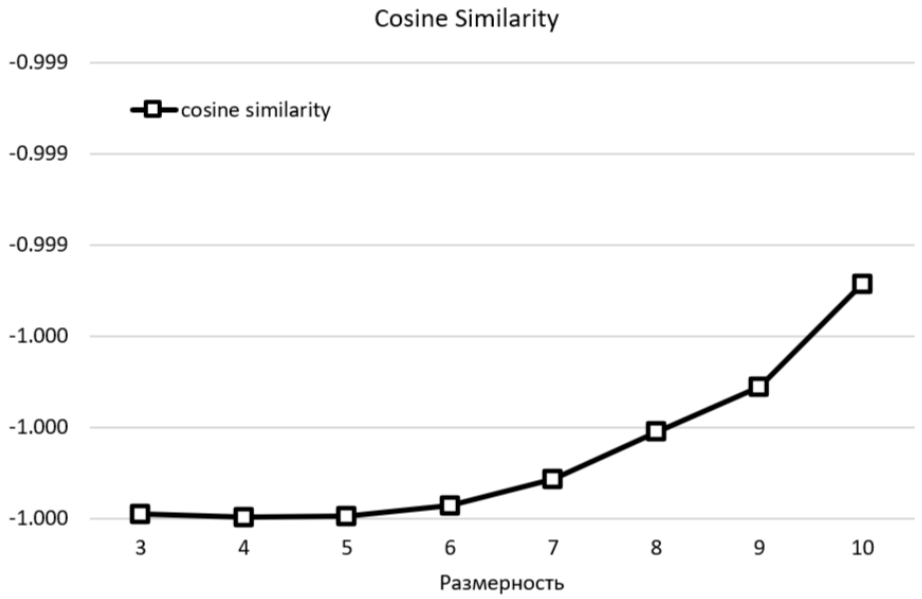


Нейронная сеть



NVIDIA Tesla V100

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{\alpha}_k \cdot \boldsymbol{y}_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{y}_k^2}}$$



Ольховский Н. А. 2023. Исследование структуры рецептивного поля в визуальном методе решения задачи линейного программирования. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3112771

Спасибо за внимание!