

Russian Supercomputing Days 2024

Incomplete factorization approach in algebraic domain decomposition methods

Кардаш Руслан Дмитриевич

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Научный руководитель: д. ф.-м. н. Ильин Валерий Павлович

Соавтор: к. ф.-м. н. Гурьева Яна Леонидовна

r.kardash@g.nsu.ru, ilin@sccc.ru, yana@lapasrv.sccc.ru



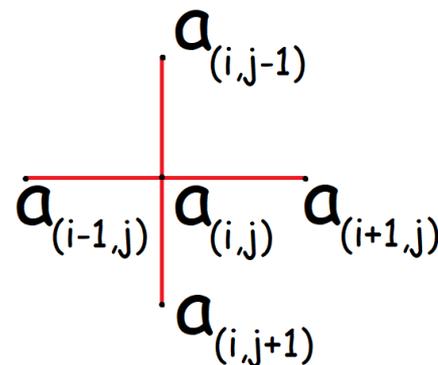
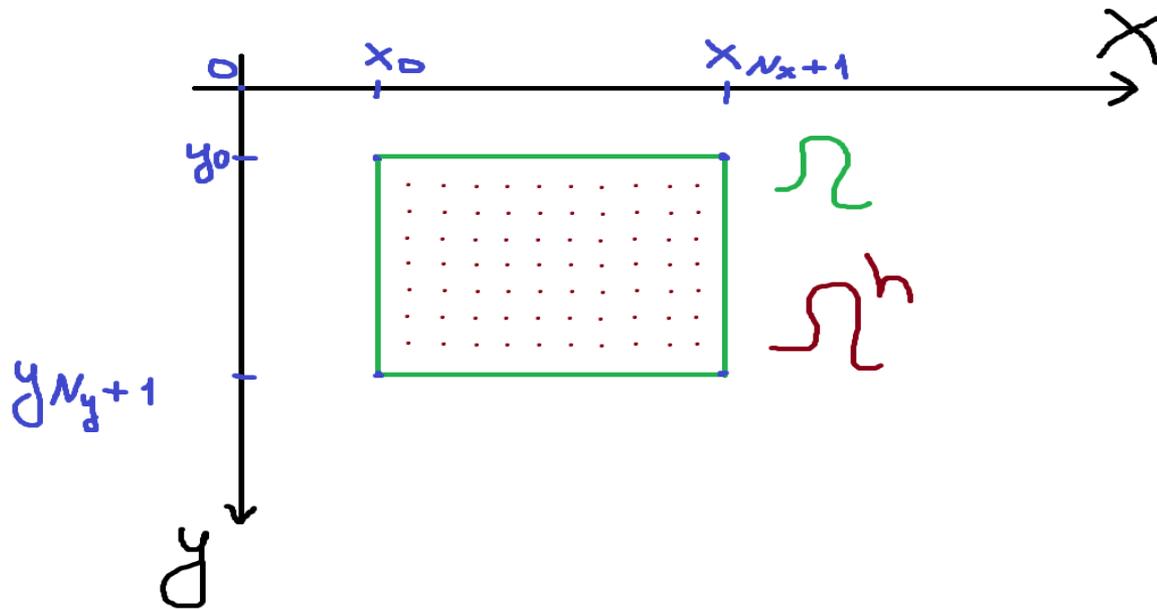
Постановка задачи:

$$\Delta u = 0, \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$u = 1 \text{ на } \partial\Omega$$

$$\Omega = [x_0, x_{N_x+1}] \times [y_0, y_{N_y+1}]$$

$$\Omega^h : (x_i, y_j) \quad i = 1, \dots, N_x; \quad j = 1, \dots, N_y;$$

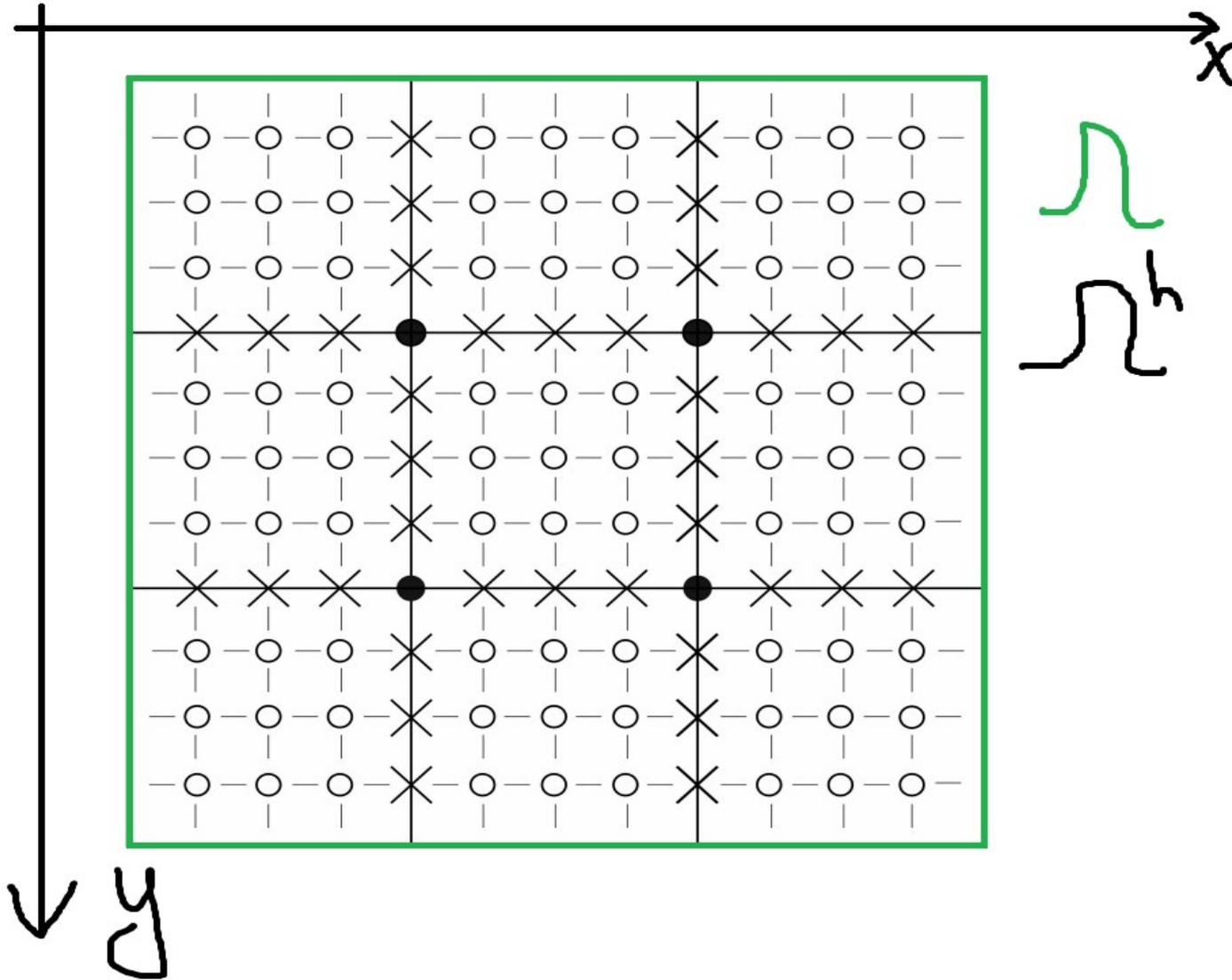


Будем решать на сетке систему из $N = N_x \cdot N_y$ пятиточечных уравнений:

$$(Au)_{i,j} = a_{i,j}^{(0)} u_{i,j} - a_{i,j}^{(1)} u_{i-1,j} - a_{i,j}^{(2)} u_{i,j-1} - a_{i,j}^{(3)} u_{i+1,j} - a_{i,j}^{(4)} u_{i,j+1} = f_{i,j}$$

Построение макросетки

Введем в Ω^h разделительные координатные линии, образующие макросетку. Макросетка состоит из макроузлов и макроребер. Остальные узлы сетки представляют внутренние узлы образованных подобластей.



Пример “новой” нумерации

177	178	179	180	181	182	183	84	226	227	228	229	230	231	232	112	275	276	277	278	279	280	281	140	324	325	326	327	328	329	330
200	201	202	203	204	205	184	85	249	250	251	252	253	254	233	113	298	299	300	301	302	303	282	141	347	348	349	350	351	352	331
199	216	217	218	219	206	185	86	248	265	266	267	268	255	234	114	297	314	315	316	317	304	283	142	346	363	364	365	366	353	332
198	215	224	225	220	207	186	87	247	264	273	274	269	256	235	115	296	313	322	323	318	305	284	143	345	362	371	372	367	354	333
197	214	223	222	221	208	187	88	246	263	272	271	270	257	236	116	295	312	321	320	319	306	285	144	344	361	370	369	368	355	334
196	213	212	211	210	209	188	89	245	262	261	260	259	258	237	117	294	311	310	309	308	307	286	145	343	360	359	358	357	356	335
195	194	193	192	191	190	189	90	244	243	242	241	240	239	238	118	293	292	291	290	289	288	287	146	342	341	340	339	338	337	336
0	1	2	3	4	5	6	168	7	8	9	10	11	12	13	169	14	15	16	17	18	19	20	170	21	22	23	24	25	26	27
373	374	375	376	377	378	379	91	422	423	424	425	426	427	428	119	471	472	473	474	475	476	477	147	520	521	522	523	524	525	526
396	397	398	399	400	401	380	92	445	446	447	448	449	450	429	120	494	495	496	497	498	499	478	148	543	544	545	546	547	548	527
395	412	413	414	415	402	381	93	444	461	462	463	464	451	430	121	493	510	511	512	513	500	479	149	542	559	560	561	562	549	528
394	411	420	421	416	403	382	94	443	460	469	470	465	452	431	122	492	509	518	519	514	501	480	150	541	558	567	568	563	550	529
393	410	419	418	417	404	383	95	442	459	468	467	466	453	432	123	491	508	517	516	515	502	481	151	540	557	566	565	564	551	530
392	409	408	407	406	405	384	96	441	458	457	456	455	454	433	124	490	507	506	505	504	503	482	152	539	556	555	554	553	552	531
391	390	389	388	387	386	385	97	440	439	438	437	436	435	434	125	489	488	487	486	485	484	483	153	538	537	536	535	534	533	532
28	29	30	31	32	33	34	171	35	36	37	38	39	40	41	172	42	43	44	45	46	47	48	173	49	50	51	52	53	54	55
569	570	571	572	573	574	575	98	618	619	620	621	622	623	624	126	667	668	669	670	671	672	673	154	716	717	718	719	720	721	722
592	593	594	595	596	597	576	99	641	642	643	644	645	646	625	127	690	691	692	693	694	695	674	155	739	740	741	742	743	744	723
591	608	609	610	611	598	577	100	640	657	658	659	660	647	626	128	689	706	707	708	709	696	675	156	738	755	756	757	758	745	724
590	607	616	617	612	599	578	101	639	656	665	666	661	648	627	129	688	705	714	715	710	697	676	157	737	754	763	764	759	746	725
589	606	615	614	613	600	579	102	638	655	664	663	662	649	628	130	687	704	713	712	711	698	677	158	736	753	762	761	760	747	726
588	605	604	603	602	601	580	103	637	654	653	652	651	650	629	131	686	703	702	701	700	699	678	159	735	752	751	750	749	748	727
587	586	585	584	583	582	581	104	636	635	634	633	632	631	630	132	685	684	683	682	681	680	679	160	734	733	732	731	730	729	728
56	57	58	59	60	61	62	174	63	64	65	66	67	68	69	175	70	71	72	73	74	75	76	176	77	78	79	80	81	82	83
765	766	767	768	769	770	771	105	814	815	816	817	818	819	820	133	863	864	865	866	867	868	869	161	912	913	914	915	916	917	918
788	789	790	791	792	793	772	106	837	838	839	840	841	842	821	134	886	887	888	889	890	891	870	162	935	936	937	938	939	940	919
787	804	805	806	807	794	773	107	836	853	854	855	856	843	822	135	885	902	903	904	905	892	871	163	934	951	952	953	954	941	920
786	803	812	813	808	795	774	108	835	852	861	862	857	844	823	136	884	901	910	911	906	893	872	164	933	950	959	960	955	942	921
785	802	811	810	809	796	775	109	834	851	860	859	858	845	824	137	883	900	909	908	907	894	873	165	932	949	958	957	956	943	922
784	801	800	799	798	797	776	110	833	850	849	848	847	846	825	138	882	899	898	897	896	895	874	166	931	948	947	946	945	944	923
783	782	781	780	779	778	777	111	832	831	830	829	828	827	826	139	881	880	879	878	877	876	875	167	930	929	928	927	926	925	924

$$N_x = 31, N_y = 31$$

$$M_x = 3, M_y = 3, N_e = 7$$

$$Au=f$$

Предобусловленный метод сопряженных градиентов:

$$\begin{aligned} r^0 &= f - \bar{A}u^0, & p^0 &= B^{-1}r^0, & n &= 0, 1, \dots : \\ u^{n+1} &= u^n + \alpha_n p^n, & r^{n+1} &= r^n - \alpha_n \bar{A}p^n, \\ p^{n+1} &= B^{-1}r^{n+1} + \beta_n p^n, & \alpha_n &= \sigma_n / \rho_n, \\ \beta_n &= \sigma_{n+1} / \sigma_n, & \sigma_n &= (r^n, B^{-1}r^n), & \rho_n &= (p^0, \bar{A}p^n). \end{aligned}$$

Факторизация, способ обращения матрицы В

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & G \end{bmatrix} \approx A$$

$$B \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 \\ A_{2,1} & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I & A_{1,1}^{-1}A_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,1}v_1 \stackrel{1}{=} g_1, \quad Gv_2 \stackrel{2}{=} g_2 - A_{2,1}v_1 = \bar{g}_2,$$

$$q_2 = v_2, \quad A_{1,1}w_1 \stackrel{3}{=} A_{1,2}q_2, \quad q_1 = v_1 - w_1.$$

Портрет A11

$$A_{1,1} = \begin{array}{|cccc|cccc|c}
\hline
T_1^x & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C_1^x \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & T_{M_x}^x & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C_{M_x}^x \\
\hline
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & T_1^y & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C_1^y \\
\cdot & & & & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & T_{M_y}^y & C_{M_y}^y \\
\hline
(C_1^x)^\top & \cdot & \cdot & \cdot & (C_{M_x}^x)^\top & (C_1^y)^\top & \cdot & \cdot & \cdot & (C_{M_y}^y)^\top & S \\
\hline
\end{array}$$

Способ обращения A11

$$A_{1,1}v_1 = \begin{bmatrix} T & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ C_{2,1} & S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_T \\ w_c \end{bmatrix} = f_1 = \begin{bmatrix} f_T \\ f_c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & T^{-1}C_{1,2} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_T \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_T \\ w_c \end{bmatrix}$$

$$S_c = C - C_{2,1}T^{-1}C_{1,2}$$

$$Tw_T \stackrel{1}{=} f_T, \quad S_c w_c \stackrel{2}{=} f_c - C_{2,1}w_T \equiv \bar{f}_c,$$

$$v_c = w_c, \quad v_T \stackrel{3}{=} w_T - T^{-1}C_{1,2}v_c.$$

- 1) Вычисляем w_T прямой прогонкой по макрорёбрам.
- 2) Формируем S_c , правую часть. Решаем СЛАУ.
- 3) Вычисляем v_T по макрорёбрам по принципу суперпозиции

$$u = \{ u_t = u_0 \hat{u}_t + u_{Ne} \check{u}_t + \bar{u}_t \}$$

u_0 имеет значение u_c в левом(нижнем) макроузле, u_{Ne} имеет значение u_c в правом(верхнем) макроузле

ConjugateGradient<SparseMatrix<double>, 1, IdentityPreconditioner> solver;					
M_c	$M_c = M_x = M_y, N_c = N_x = N_y$, time in seconds, n - number of iterations , $\delta = \text{Sup} 1 - u_{i,j} $				
2	$N_c = 101N_e = 33$ 0.158349 $n = 20$ $\delta = 1.37903e - 07$	$N_c = 200N_e = 66$ 1.65183 $n = 29$ $\delta = 1.28194e - 07$	$N_c = 401N_e = 133$ 16.8393 $n = 41$ $\delta = 2.62162e - 07$	$N_c = 800N_e = 266$ 224.414 $n = 57$ $\delta = 6.50443e - 07$	$N_c = 1601N_e = 533$ 2788.77 $n = 81$ $\delta = 8.99956e - 07$
4	$N_c = 104N_e = 20$ 0.178205 $n = 28$ $\delta = 1.51944e - 07$	$N_c = 204N_e = 40$ 1.483 $n = 39$ $\delta = 2.14805e - 07$	$N_c = 404N_e = 80$ 14.8021 $n = 55$ $\delta = 3.0798e - 07$	$N_c = 804N_e = 160$ 144.798 $n = 75$ $\delta = 1.1563e - 06$	$N_c = 1604N_e = 320$ 1826.33 $n = 104$ $\delta = 1.76445e - 06$
8	$N_c = 107N_e = 11$ 0.146393 $n = 37$ $\delta = 2.26982e - 07$	$N_c = 206N_e = 22$ 1.14643 $n = 52$ $\delta = 2.50064e - 07$	$N_c = 404N_e = 44$ 11.0852 $n = 72$ $\delta = 4.20884e - 07$	$N_c = 800N_e = 88$ 111.339 $n = 101$ $\delta = 6.34594e - 07$	
16	$N_c = 101N_e = 5$ 0.136468 $n = 45$ $\delta = 1.60707e - 07$	$N_c = 203N_e = 11$ 1.04619 $n = 67$ $\delta = 2.19612e - 07$	$N_c = 407N_e = 23$ 8.41433 $n = 95$ $\delta = 4.11233e - 07$		

SparseLU<SparseMatrix<double> solver;					
M_c	$M_c = M_x = M_y, N_c = N_x = N_y$, time in seconds, n - number of iterations , $\delta = \text{Sup} 1 - u_{i,j} $				
2	$N_c = 101N_e = 33$ 0.414239 $n = 20$ $\delta = 1.35157e - 07$	$N_c = 200N_e = 66$ 2.90107 $n = 29$ $\delta = 1.24678e - 07$	$N_c = 401N_e = 133$ 19.6886 $n = 41$ $\delta = 2.56163e - 07$	$N_c = 800N_e = 266$ 178.784 $n = 57$ $\delta = 6.04294e - 07$	$N_c = 1601N_e = 533$ 2141.52 $n = 81$ $\delta = 8.36217e - 07$
4	$N_c = 104N_e = 20$ 0.547308 $n = 28$ $\delta = 1.50336e - 07$	$N_c = 204N_e = 40$ 3.15459 $n = 39$ $\delta = 2.15915e - 07$	$N_c = 404N_e = 80$ 19.4447 $n = 55$ $\delta = 3.08234e - 07$	$N_c = 804N_e = 160$ 162.953 $n = 75$ $\delta = 1.15614e - 06$	$N_c = 1604N_e = 320$ 1509.51 $n = 105$ $\delta = 1.53843e - 06$
8	$N_c = 107N_e = 11$ 0.481277 $n = 37$ $\delta = 2.27507e - 07$	$N_c = 206N_e = 22$ 3.19916 $n = 52$ $\delta = 2.50895e - 07$	$N_c = 404N_e = 44$ 21.2786 $n = 72$ $\delta = 4.21225e - 07$	$N_c = 800N_e = 88$ 169.891 $n = 101$ $\delta = 6.35069e - 07$	
16	$N_c = 101N_e = 5$ 0.459128 $n = 45$ $\delta = 1.61366e - 07$	$N_c = 203N_e = 11$ 2.74365 $n = 67$ $\delta = 2.21191e - 07$	$N_c = 407N_e = 23$ 21.7955 $n = 95$ $\delta = 4.1068e - 07$		

Вывод

Основной результат

Разработан алгоритм, в котором количество итераций по подобластям слабо зависит от общего количества узлов сетки и количества подобластей. Алгоритм реализован на C++ для двумерного случая.

Научная новизна

Предложен и экспериментально исследован новый алгоритм решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, возникающими при сеточных аппроксимациях многомерных краевых задач.

Практическая ценность

Созданный инструмент может быть эффективно применен для решения актуальных прикладных задач из широкого класса приложений, в том числе нефтегазовой отрасли.

Планы на будущее.

Планы на будущее - развитие, доработка и внедрение созданного ПО.

Планы по развитию:

- реализация метода для трехмерного случая с распараллеливанием алгоритмов;
- совершенствование предобуславливающей матрицы B для повышения эффективности итерационного процесса;
- использование эффективных многосеточных решателей для вспомогательных СЛАУ в подобластях;
- разработка методов и технологий для решения многомерных краевых и начально-краевых задач на неструктурированной сетке;

Представленное исследование является продолжением результатов работы:

Gurieva, Y.L., Ilyin, V.P., Kozlov D.I. Parallel Domain Decomposition Methods with Graph Preconditioning In: Parallel computing technologies (PAVT'2023). Proceedings of the XVII All-Russian Scientific Conference with international participation. YuUrGU, Chelyabinsk, 215--228 (2023).



Спасибо за внимание!