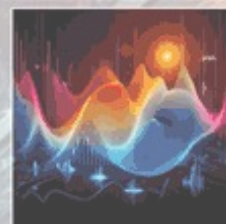


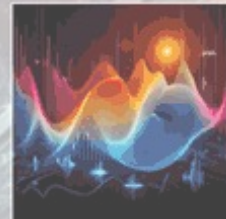
**Международная конференция  
"Суперкомпьютерные дни в России",  
23-24 сентября 2024 г.**



## **О проблемах сходимости итерационных методов решения двухкоэффициентных обратных задач ультразвуковой томографии**

**Гончарский А.В., Романов С.Ю., Серёжников С. Ю.  
Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,  
НИВЦ, Москва**

# Ультразвуковая томография



- Волновая томография или full waveform inversion (FWI) — метод неразрушающего исследования внутренней структуры объекта контроля.
- Основные применения — медицинская визуализация и неразрушающий контроль.
- Основные виды: 2D-томография, послойная 2.5D и 3D томография.
- Особенности: зондирование объекта со всех сторон. Реконструкция с использованием как прошедших, так и отраженных волн.
- Медицинская ультразвуковая томография для ранней диагностики рака молочной железы — важная проблема современной медицины.
- Работы по созданию ультразвуковых томографов ведутся в США, Германии, странах Европы.
- В НИВЦ МГУ разрабатывается экспериментальный образец ультразвукового томографа для диагностики молочной железы.

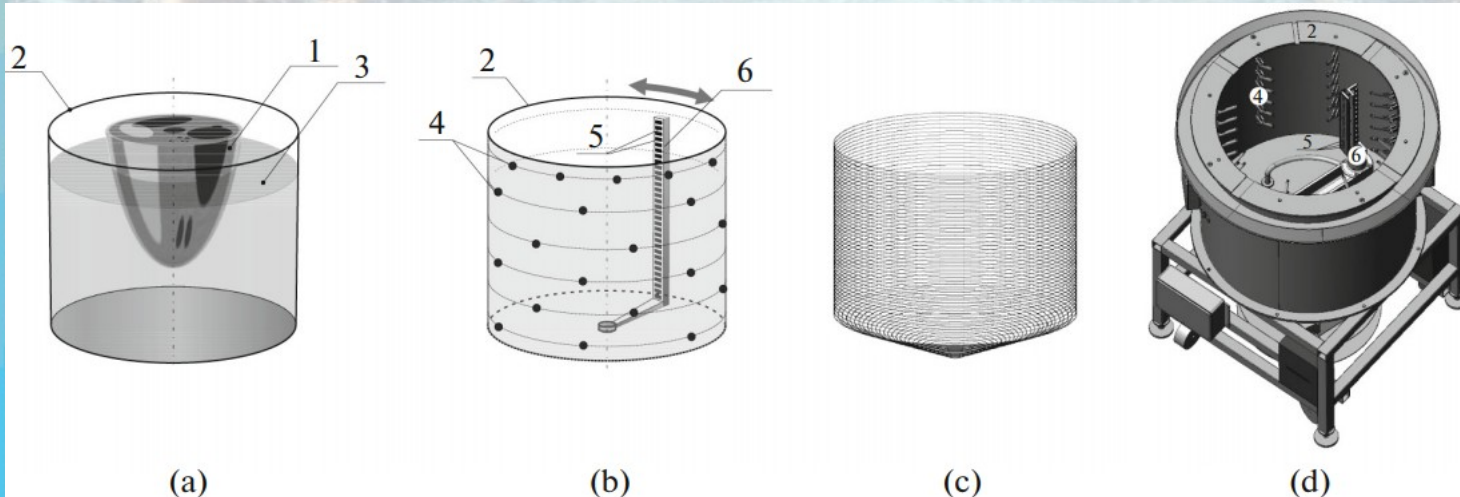
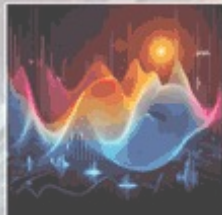


Схема эксперимента:  
размещение объектов (a);  
излучатели и детекторы (b);  
поверхность регистрации данных (c);  
3D-модель прототипа томографа (d)

# Постановка задачи волновой томографии



Скалярная волновая модель с учетом поглощения в

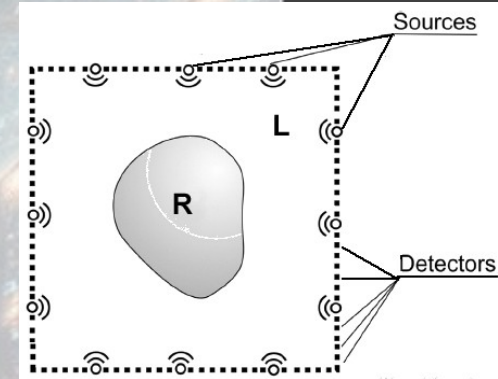
начальные данные

Здесь  $u$  - волновое поле,  $c$  - скорость волны,  $\mu$  - поглощение в среде,  $\Delta$  - оператор Лапласа по

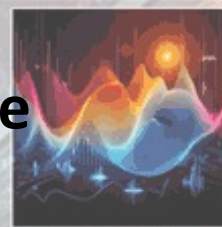
- Обратная задача ставится как задача поиска функций  $\mu$  и  $c$ , минимизирующих функционал невязки

Здесь  $D$  - экспериментальные данные,  $u$  - волновое поле, рассчитанное для коэффициентов  $\mu$  и  $c$ .

- В частотной области получаем ур-е Гельмгольца с учетом поглощения  
$$\Delta u + k^2 u = f$$
  
– частота,  $k$ . Используя метод функции Грина, запишем



# Единственность решения обратной задачи в . Редукция нелинейной коэффициентной обратной задачи к системе двух линейных интегральных уравнений 1 рода.



## Теорема.

а) Пусть выполнены некоторые условия гладкости на , и на множества источников, приемников и неоднородности. Пусть и ее частные производные по до второго порядка обладают преобразованием Лапласа, определенным для всех , где , . Тогда обратная задача нахождения функции, имеет единственное решение в  $C(R)$ .

б) Искомые функции , могут быть получены из последовательного решения линейных интегральных уравнений 1 рода (уравнения Лаврентьева)

,

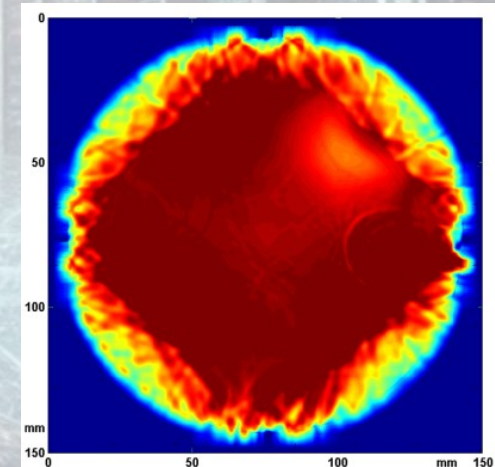
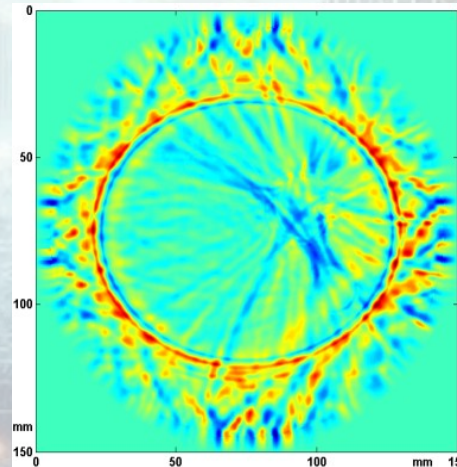
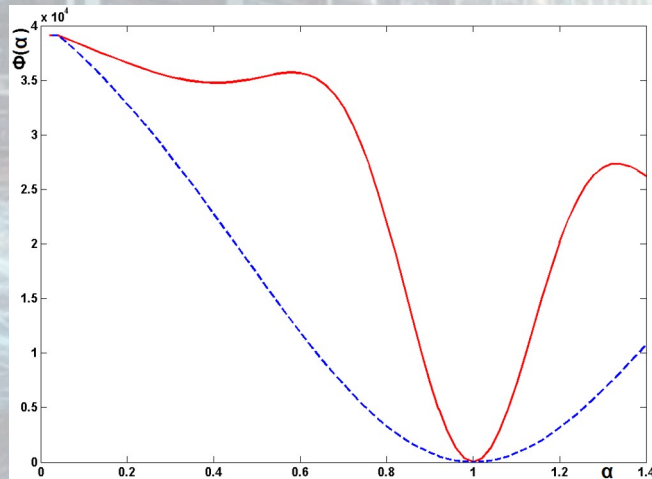
,

- Возможность редукции исходной нелинейной задачи к линейной зависит от наличия близких к 0 частот в спектре зондирующего импульса. Это трудновыполнимая задача для реальных экспериментов. Кроме того, решение полученных интегральных уравнений является сильно неустойчивой задачей, что связано, в том числе, с видом ядра интегрального оператора.

# Multistage method и его обоснование



- Типичная ситуация для нелинейных задач - невыпуклость функционала невязки, т.е. наличие у него локальных минимумов.
- В работе проведены строгие математические оценки, показывающие, что при достаточно низких частотах нелинейная обратная задача приближается к линейной задаче, и функционал невязки приближается к выпуклому.



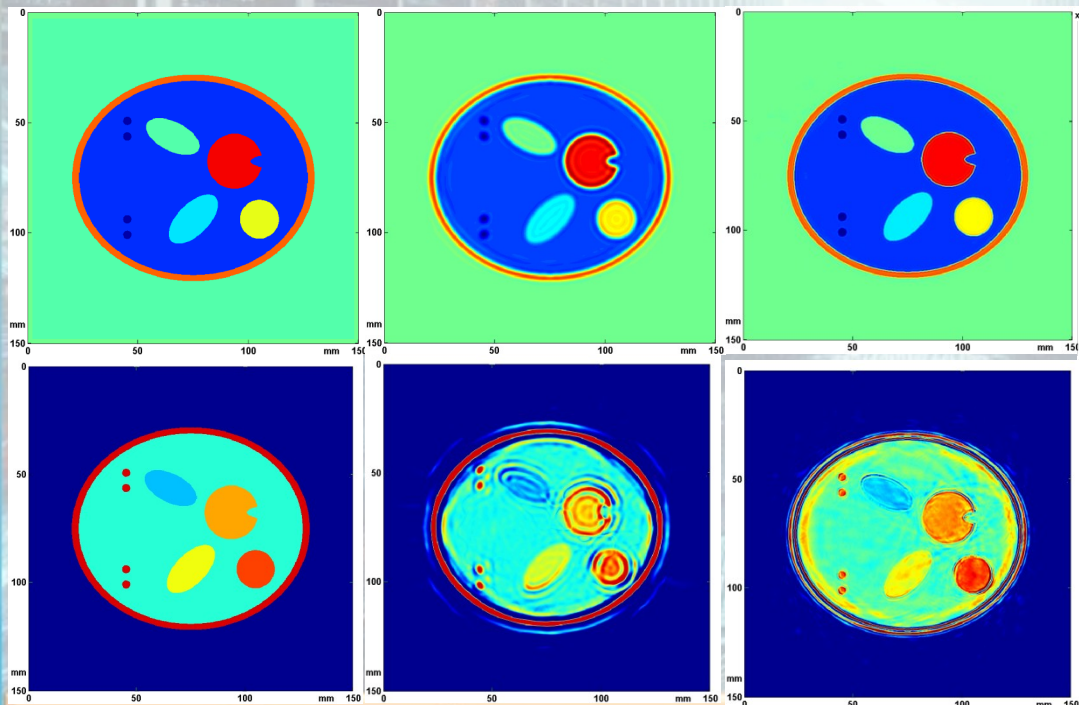
**Рисунок.** График функционала невязки  $\Phi(\alpha)$  для  $\lambda=15$  мм (пунктирная линия) и для  $\lambda=5$  мм (сплошная линия) (слева); восстановленная скорость звука (центр) и поглощение (справа) для  $\lambda=5$  мм без MSM метода

# Multistage method и его обоснование



Полученные оценки служат математическим обоснованием MSM метода.

**MSM метод:** Используем экспериментальные данные на двух (или более) разных центральных частотах  $f_1$  и  $f_2$ . Сначала решается итерационными методами обратная задача на низкой частоте  $f_1$ , где начальное приближение выбирается в виде известных констант в окружающей среде. Далее на втором этапе решается задача на более высокой частоте  $f_2$ . В качестве начального приближения используются скорости и поглощения, полученные на первом этапе на более низкой частоте  $f_1$ . Процесс продолжается дальше, если выбрано более двух центральных частот.

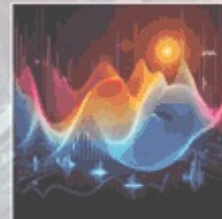


Показано, что в MSM методе, даже если на высокой частоте метод сходится, проведение расчетов на низкой частоте уменьшает число итераций в 2-3 раза.

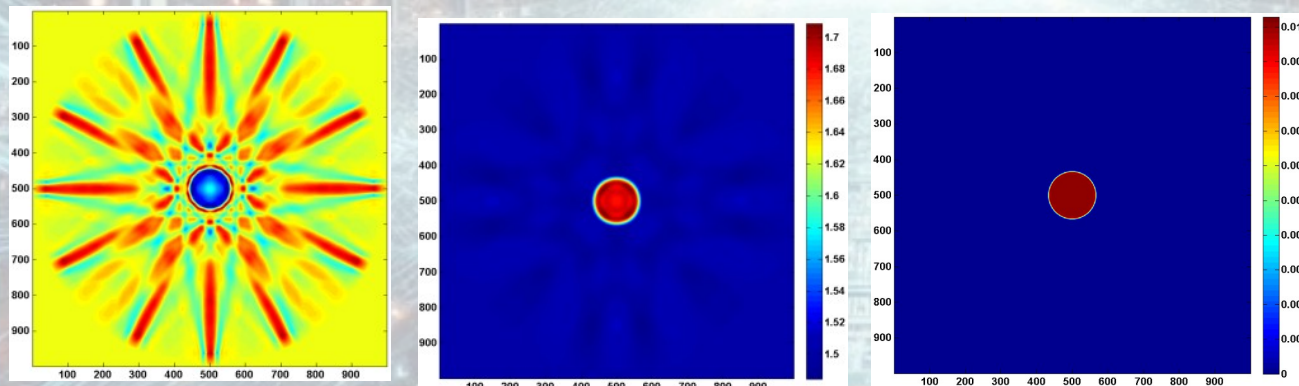
**Рисунок.** Слева-направо: Фантом, реконструированная скорость,  $\lambda=15$  мм; реконструированная скорость  $\lambda=5$  мм.

Фантом, реконструированное поглощение,  $\lambda=15$  мм, реконструированное поглощение,  $\lambda=5$  мм

# Оценка волновой функции рассеяния в борновском приближении в



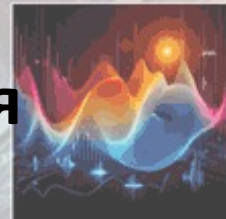
- Для решения нелинейной задачи применяется Multi-Stage метод, суть которого в том, что на первых этапах метода используется только низкочастотная часть сигналов. Оценка низкочастотного диапазона - это центральный вопрос метода.
- В работе получено выражение для рассеяния на неоднородностях борновском волновом приближении в , которое, при заданных значениях параметров задачи, позволяет оценить конкретные значения границы низкочастотного диапазона для первого этапа метода.
- Показано, что полученное выражение полностью согласуется с эвристическими оценками начальной частоты в лучевом приближении.
- Показано, что для характерных частот обратная задача фактически является выпуклой по поглощению.



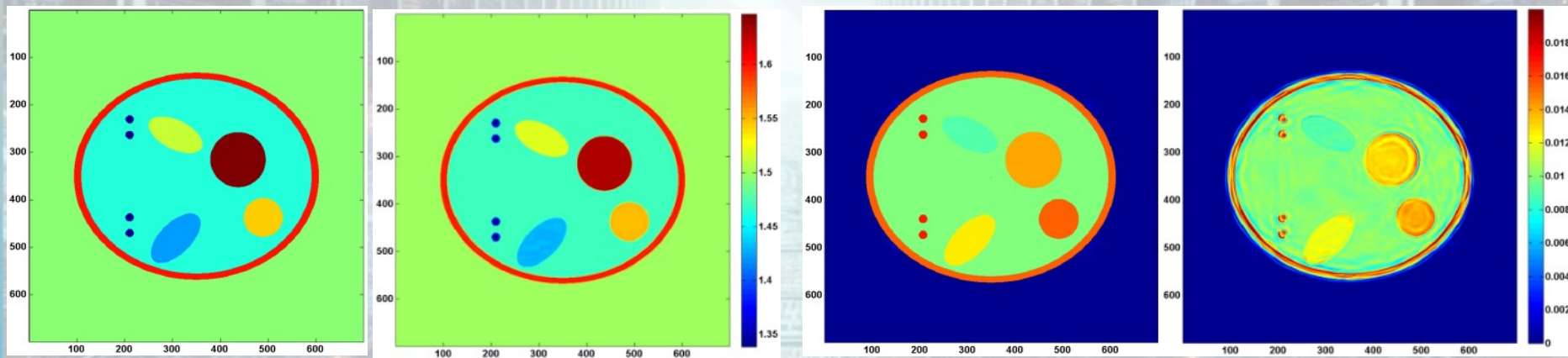
**Рисунок.** Проверка полученных оценок.

Расчеты для неоднородности по скорости при частоте 400 кГц (слева); 100 кГц (центр). Расчеты для неоднородности по поглощению при частоте 400 кГц (справа).

# Сравнение реконструкции скорости и поглощения



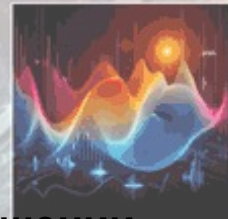
- Характерной особенностью является лучшая реконструкция скорости, чем поглощения. Это связано с тем, что коэффициенты скорости и поглощения соответствуют вторым и первым производным по времени в волновом уравнении соответственно, а частоты зондирования достаточно высоки.
- Показано, что для характерных параметров задачи при наличии ошибки измерений экспериментальных данных относительная ошибка определения поглощения больше, чем скорости в  $\sim 100$  раз.



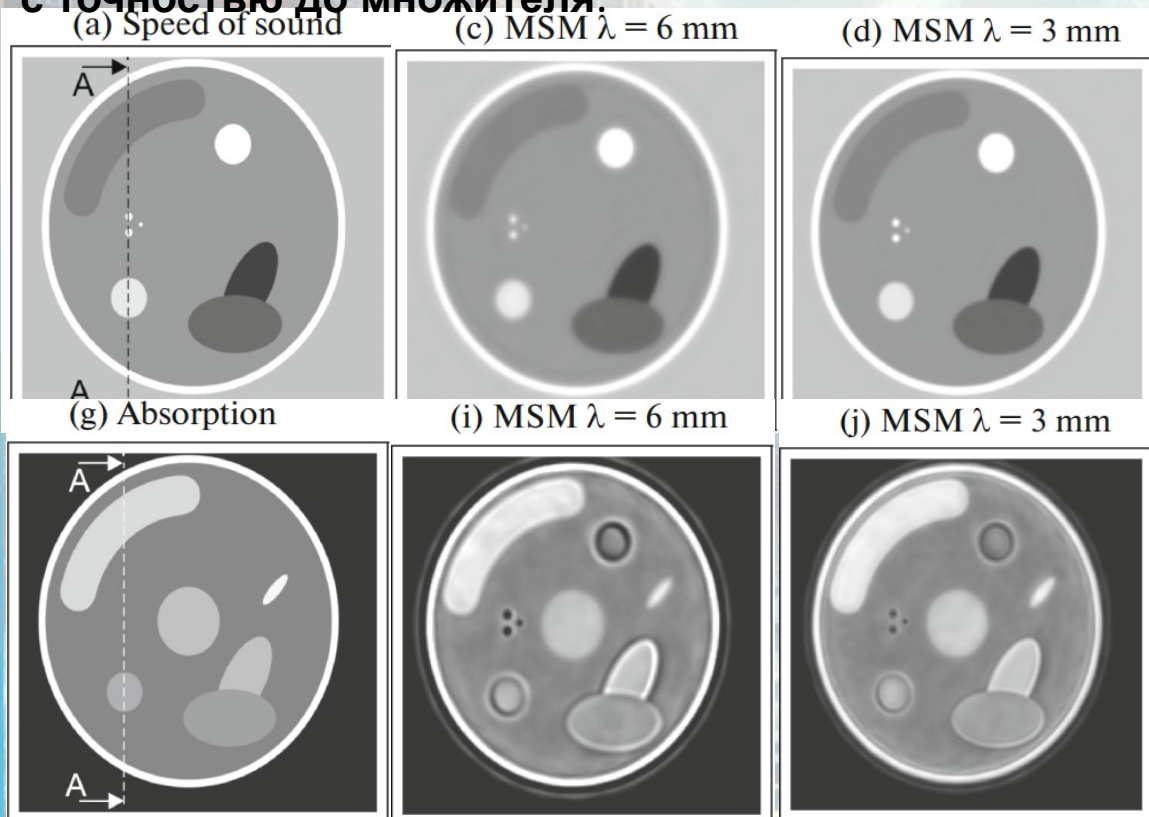
**Рисунок.** Фантом скорости и результат реконструкции скорости (слева).  
Фантом поглощения и результат реконструкции поглощения (справа)



# Артефакты реконструкции в виде ложной границы локальных неоднородностей и причины их возникновения



- При наличии локальной неоднородности по скорости (поглощению) при решении обратной задачи получаем не только эту неоднородность по скорости (поглощению), но и дополнительную ложную границу по поглощению (скорости).
- Объяснены причины появления артефактов (ложных границ): показано, что при падении плоской волны на плоскую границу, при неоднородности по скорости (или поглощению) в виде  $\theta$ -функции, отраженная волна, совпадает с отраженной волной от неоднородности по поглощению (или скорости соответственно) в виде  $\delta$ -функции, с точностью до множителя.



Однако это не означает, что решение обратной задачи не единственно, поскольку помимо отраженных волн, учитываются также проходящие волны.

Локальные поглощающие включения приводят к меньшим артефактам реконструкции скорости. Причина - качество реконструкции скорости всегда выше.