



Суперкомпьютерные дни в России

2024

международная научная конференция

23 - 24 сентября

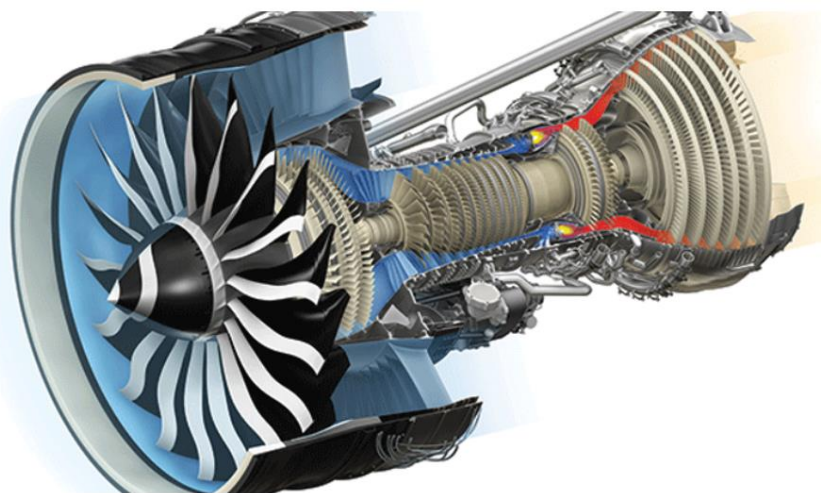
# Towards an Adaptation of the **NonLinear Harmonics Method** Realized in an Unstructured Flow Solver for Simulation of Turbomachinery Problems on Supercomputers



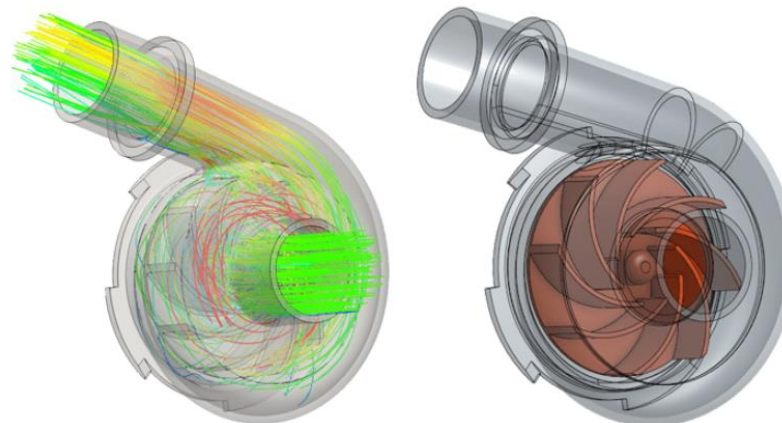
**А.П. Дубень<sup>1</sup>**, Р.А. Загитов<sup>2,1</sup>, Н.В. Шуваев<sup>2,1</sup>, О.В. Маракуева<sup>2,1</sup>  
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва  
Инженерный центр численных исследований, г. Санкт-Петербург



# Турбомашины: турбины и компрессоры



двухконтурный турбореактивный двигатель

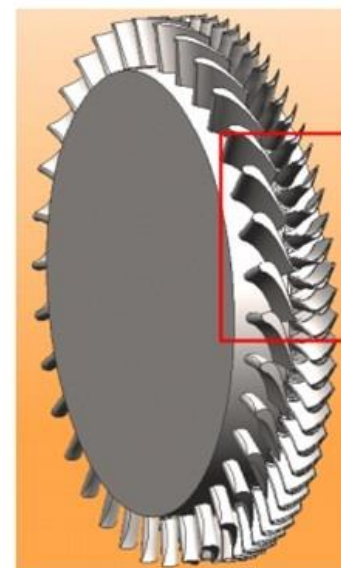


центробежный компрессор



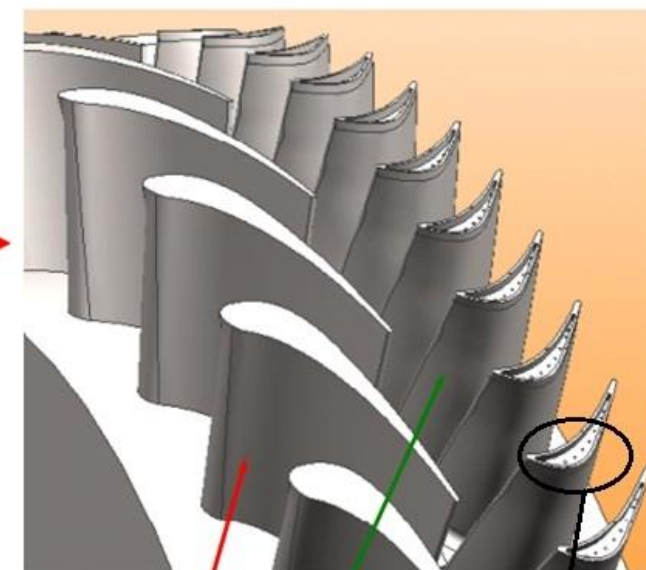
центробежный компрессор

- **Множество** ступеней (статор+ротор)
- **Большое** и **разное** количество лопаток на венце (статор или ротор)
- Множество дополнительных устройств



Axial Turbine Stage

Ступень осевой турбины



Stator

Rotor

Cooling holes

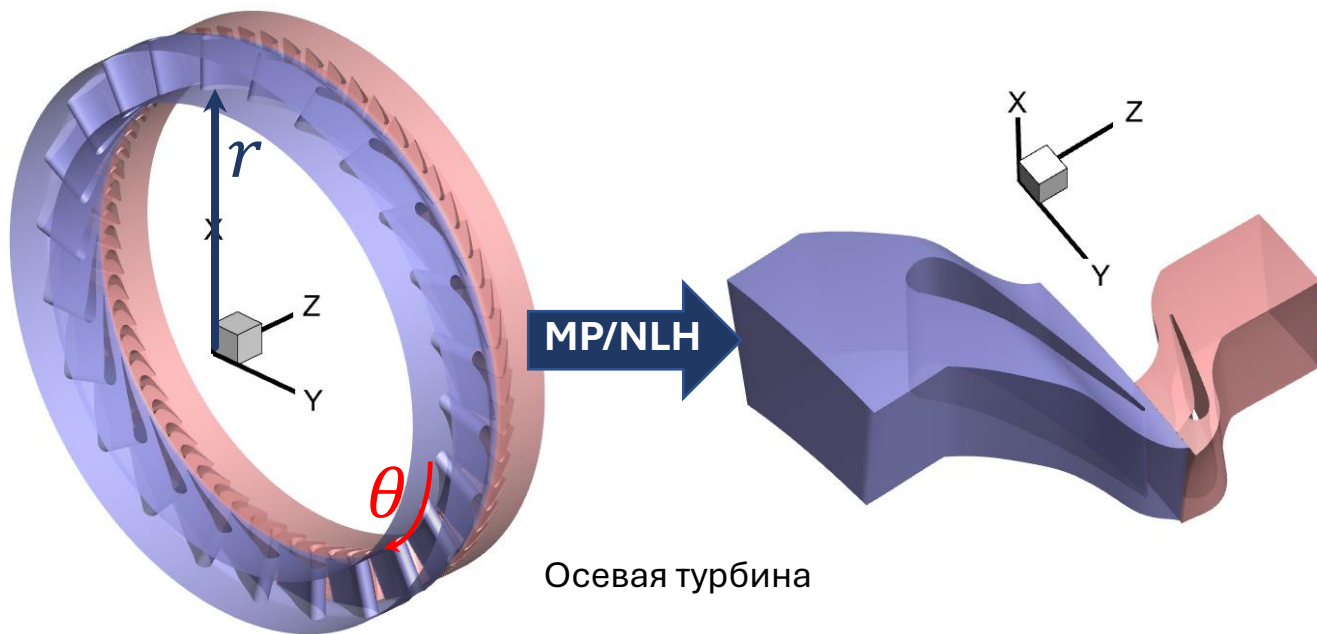
# Ключевые эффективные технологии для турбомашин



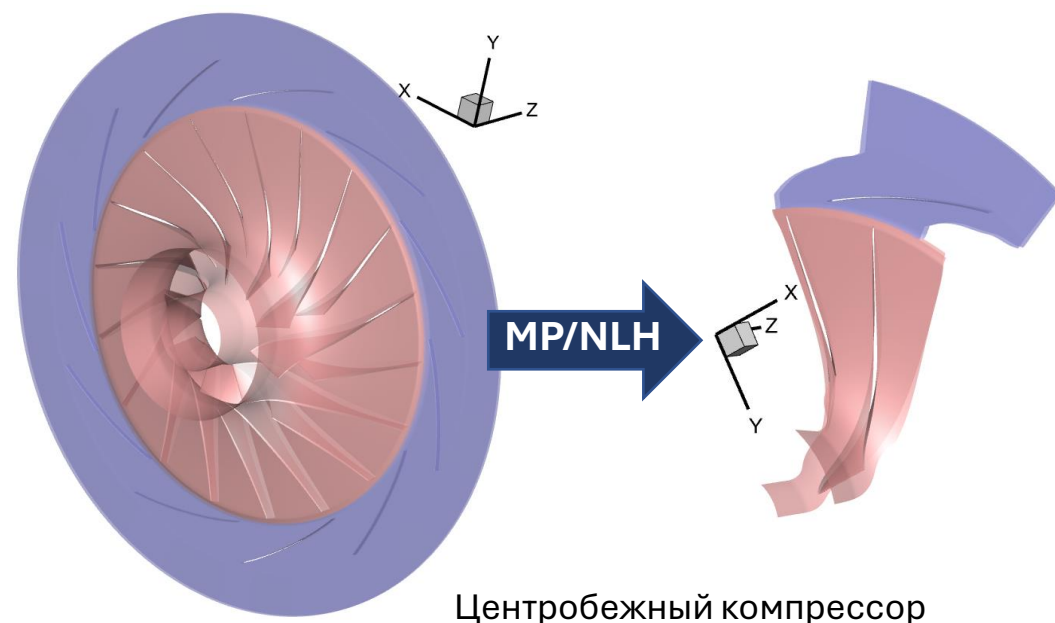
- Mixing plane (**MP**), поверхность смешения
  - один межлопаточный канал на венец
  - не учитывается неравномерность в окружном направлении
  - условия окружной периодичности

- Реализовано<sup>1</sup> в **NOISEtte**

- Non-Linear Harmonics (**NLH**), нелинейный гармонический анализ
  - учет нестационарных возмущений, связанных с частотами следования лопаток соседних венцов
  - один межлопаточный канал на венец
  - условия окружной периодичности (обобщенные условия периодичности для гармоник)



Осевая турбина



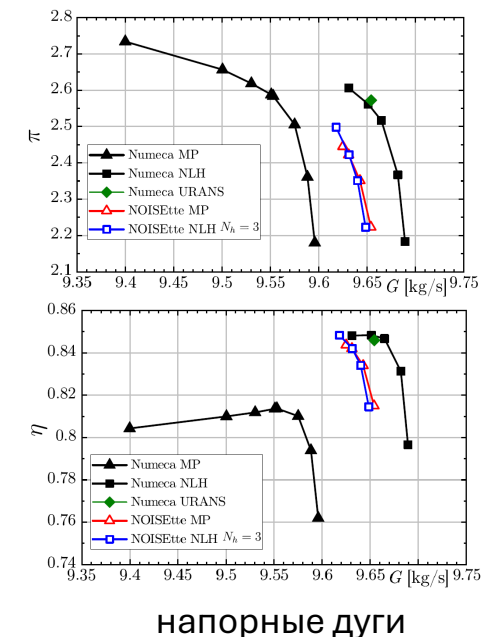
Центробежный компрессор

<sup>1</sup>A.P. Duben, A.V. Gorobets, O.V. Marakueva, N.V. Shuvaev, R.A. Zagitov, S.A. Soukov. Supercomputer Simulations of Turbomachinery Problems with Higher Accuracy on Unstructured Meshes // In: Voevodin, V., Sobolev, S., Yakobovskiy, M., Shagaliev, R. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13708. Springer, Cham. pp. 356–367 (доклад на конференции Суперкомпьютерные дни в России 2022)

# Нелинейный гармонический анализ (NLH)



- Для оценки основных аэродинамических характеристик узлов (массовый расход  $G$ , степень повышения полного давления  $\pi$ , КПД  $\eta$ ), как правило, достаточно учета только стационарной части взаимодействия венцов. Но
  - нельзя получить аэродинамические нагрузки на лопатки, акустику (а с NLH – можно)
  - может неточно описывать аэродинамику во внутренних неосесимметричных частях турбомашин
- Метод нелинейных гармоник (или нелинейный гармонический анализ, NLH, Non-Linear Harmonics)<sup>1,2</sup> является мощным инструментом моделирования периодических нестационарных гидродинамических течений
  - в основном используется для моделирования сложных нестационарных эффектов в турбомашинах
  - позволяет значительно сократить время проведения расчётов, по сравнению с обычными нестационарными расчётами
- NLH реализован в ~~Numeca~~ Cadence FINE/Turbo, работающем на структурированных сетках
- **Цель работы** – разработка и эффективная реализация метода NLH MP в рамках вершинно-центрированного конечно-объемного вычислительного алгоритма NOISEtte
  - работающего на неструктурированных сетках
  - основанного на схемах повышенной точности



<sup>1</sup>He, L. and Ning, W., 1998, "Efficient Approach for Analysis of Unsteady Viscous Flows in Turbomachines", AIAA Journal, Vol. 36, No. 11.

<sup>2</sup>Vilmin, S, Lorrain, E, Hirsch, C, & Swoboda, M. "Unsteady Flow Modeling Across the Rotor/Stator Interface Using the Nonlinear Harmonic Method." Proceedings of the ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea, and Air. Volume 6: Turbomachinery, Parts A and B. Barcelona, Spain. May 8–11, 2006. pp. 1227-1237. ASME.

# Уравнения RANS



$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathcal{F}^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T \quad \mathcal{F}^C = (\mathbf{F}_x^C, \mathbf{F}_y^C, \mathbf{F}_z^C) = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{m} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}^D = (\mathbf{F}_x^D, \mathbf{F}_y^D, \mathbf{F}_z^D) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

$$p = (\gamma - 1) \rho e$$

- $\rho$  – плотность
- $\mathbf{m} = \rho \mathbf{u}$  - моменты
- $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$  – скорость
- $p$  – давление
- $e$  – удельная внутренняя энергия
- $E = \rho \left( e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + k \right)$  – полная энергия на единицу объема
- $k = 0.5 u_j'^2$  – кинетическая энергия турбулентности
- $\gamma$  – показатель адиабаты
- $\delta_{ij}$  – символ Кронекера
- $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\} = 2\mu_{\text{eff}} \left( S_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{u} \right)$
- $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- $\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t$  - молекулярная и турбулентная вязкость
- $\mathbf{q} = -\frac{\mu_{\text{eff}}}{\gamma \text{Pr}} \nabla e$  – вектор тепловых потоков

# Форма решения



Будем предполагать следующий вид решения для  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T$ :  $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}'$

$$\mathbf{Q}' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\tilde{\mathbf{Q}}_k e^{i\omega_k t} + \tilde{\mathbf{Q}}_{-k} e^{i\omega_{-k} t}) = \sum_{k=1}^N (\mathcal{R}\{\tilde{\mathbf{Q}}_k\} \cos(\omega_k t) - \mathcal{I}\{\tilde{\mathbf{Q}}_k\} \sin(\omega_k t))$$

- $\omega_k = k\omega_{\text{BPF}}$  – гармоники
- $\omega_{\text{BPF}} = M \cdot \Omega_r$  – первая гармоника, связанная с частотой следования лопаток (BPF – blade passing frequency) соседних венцов ( $\Omega_r$  – частота вращения турбомшины)
- $N$  – число гармоник
  - чем больше, тем лучше
  - определяется вычислительными возможностями
- $\tilde{\mathbf{Q}}_k$  и  $\tilde{\mathbf{Q}}_{-k}$  – комплексно сопряженные
- $\mathbf{Q}'$  описывают периодические возмущения, связанные с частотой прохождения лопаток

# Уравнения для средних значений $\bar{\mathbf{Q}}$



$$\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}^c(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}') = \nabla \cdot \mathcal{F}^D(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}')$$

$$\mathcal{F}^c = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{m}} \\ \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \bar{p} \mathbf{I} \\ (\bar{E} + \bar{p}) \bar{\mathbf{u}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{u}}' \otimes \bar{\mathbf{m}}' \\ (\bar{E}' + \bar{p}') \bar{\mathbf{u}}' \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}' \cdot \bar{\mathbf{u}}' \end{pmatrix}$$

- $\bar{\mathbf{m}} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}$
- $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\} = 2\mu_{\text{eff}} \left( S_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \text{div} \bar{\mathbf{u}} \right)$
- $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$
- $\mu_{\text{eff}} = \bar{\mu} + \bar{\mu}_t$

## Дополнительные замыкающие соотношения:

- $\overline{f'g'} = 2 \sum_{k=1}^N (\mathcal{R}\{f'\} \mathcal{R}\{g'\} + \mathfrak{I}\{f'\} \mathfrak{I}\{g'\})$
- $\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma'_{ij}\} = 2\mu_{\text{eff}} \left( S'_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{u}' \right)$
- $S'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$
- $\mathbf{u}' = \frac{(\rho \mathbf{u})' - \bar{\mathbf{u}} \rho'}{\bar{\rho}}$

# Уравнения для пульсаций $\mathbf{Q}'$ и амплитуд гармоник $\tilde{\mathbf{Q}}_k$



$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}^c(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}') = \nabla \cdot \mathcal{F}^D(\bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q}')$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}_k}{\partial t} + i\omega_k \tilde{\mathbf{Q}}_k + \nabla \cdot \mathcal{F}^c(\bar{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{Q}}_k) = \nabla \cdot \mathcal{F}^D(\bar{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{Q}}_k)$$

$$\mathcal{F}^c = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{m}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{m}} + \bar{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{m}} + \tilde{p} \mathbf{I} \\ (\bar{E} + \tilde{p}) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{E} + \tilde{p}) \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}^D = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{q} \end{pmatrix}$$

- $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{\tilde{\sigma}_{ij}\} = 2\mu_{\text{eff}} \left( \tilde{S}_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \text{div} \tilde{\mathbf{u}} \right)$
- $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)$
- $\mu_{\text{eff}} = \bar{\mu} + \bar{\mu}_t$

**Дополнительные замыкающие соотношения:**

- $\widetilde{(fg)} = \tilde{f} \bar{g} + \tilde{g} \bar{f}$
- $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\tilde{\mathbf{m}} - \tilde{p} \bar{\mathbf{u}}}{\bar{\rho}}$
- $\tilde{p} = (\gamma - 1) \left[ \tilde{E} - \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{m}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{m} \tilde{\mathbf{u}}) \right]$



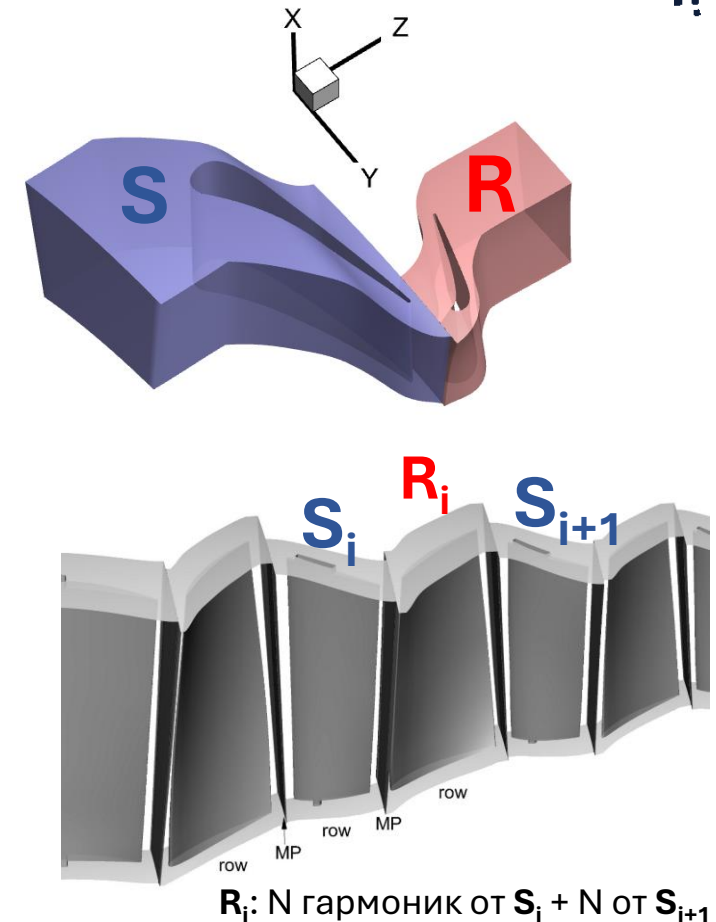
# Особенности численной реализации NLH<sup>1</sup> (1/2)



- Уравнения для гармоник:
  - разделяются на действительную и мнимую часть
  - $2 \cdot 5 \cdot N$  – общее число уравнений ( $N$  – число гармоник)
  - уравнения для различных гармоник не зависят друг от друга
- Конвективные потоки – на основе схемы Роу
  - собственные значения вычисляются через осредненные переменные
  - для вычисления предраспадных значений  $\tilde{Q}_{kj}$  и  $\tilde{Q}_{jk}$  может использоваться реконструкция с помощью схемы EBR<sup>2</sup>

$$\mathbf{F}_{jk} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}(\bar{Q}_j, \tilde{Q}_{jk}) + \mathcal{F}(\bar{Q}_k, \tilde{Q}_{kj}) \right) \cdot \mathbf{n}_{jk} - \mathbf{s}_{jk}(\bar{Q}_j) |\bar{\Lambda}_{jk}(\bar{Q}_j)| \mathbf{s}_{jk}^{-1}(\bar{Q}_j) (\tilde{Q}_{kj} - \tilde{Q}_{jk})$$

- Вязкие потоки – в рамках реализованной в NOISEtte схемы<sup>3</sup>



$R_i$ :  $N$  гармоник от  $S_i$  +  $N$  от  $S_{i+1}$

<sup>1</sup>A.P. Duben, R.A. Zagitov, N.V. Shuvaev. Nonlinear Harmonics Method for Supercomputer Simulations of Fluid Dynamics in Turbomachines with Higher Accuracy on Unstructured Meshes // Lobachevskii Journal of Mathematics, No. 8 2024

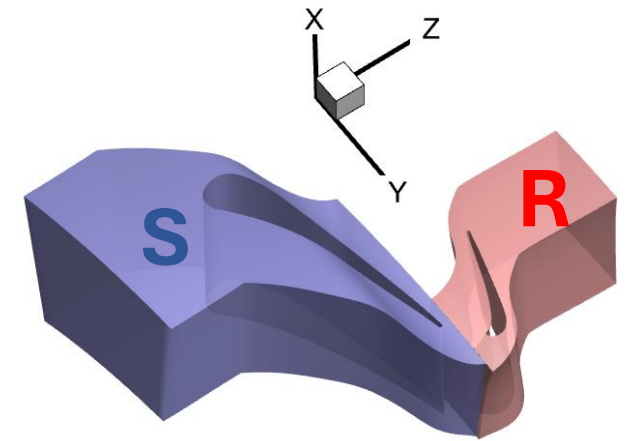
<sup>2</sup>Abalakin I, Bakhvalov P, Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes. Internat J Numer Methods Fluids 2016;81:331–56

<sup>3</sup>Bakhvalov P, Surnachev M. Method of averaged element splittings for diffusion terms discretization in vertex-centered framework. J Comput Phys 2022;450:110819.

# Особенности численной реализации<sup>1,2</sup> NLH



- Граничные условия
  - вход-выход: схема Роу,  $\tilde{Q}_{jk} = 0$ ,  $\tilde{Q}_{kj}$  – из внутренней точки
  - условия проскальзывания (SLIP) и прилипания (NOSLIP) – как в NOISEtte
- Обобщенные условия периодичности для гармоник (со сдвигом по фазе)
- Интегрирование по (псевдо) времени – явная схема Рунге-Кутты
  - на внутренних итерациях одновременно решаются уравнения для средних и для гармоник (аналогично [He&Ning, 1998])
- Интегрирование по (псевдо) времени – неявная схема BDF1
  - сначала шаг по средним величинам, потом – по гармоникам
  - для гармоник используется солвер бисопряженных градиентов с предобуславливателем такой же, как и для средних переменных
  - блочная матрица с блоком  $10 \times 10$
- Распараллеливание – (пока) только на CPU гибридное MPI+OpenMP



Матрица: диагональный блок

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\omega_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\omega_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \omega_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_k \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

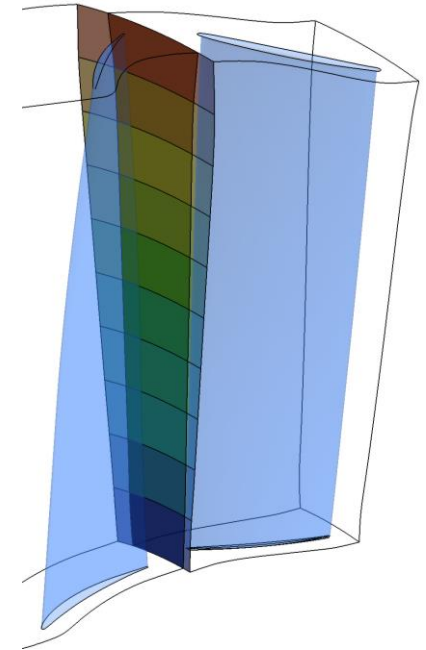
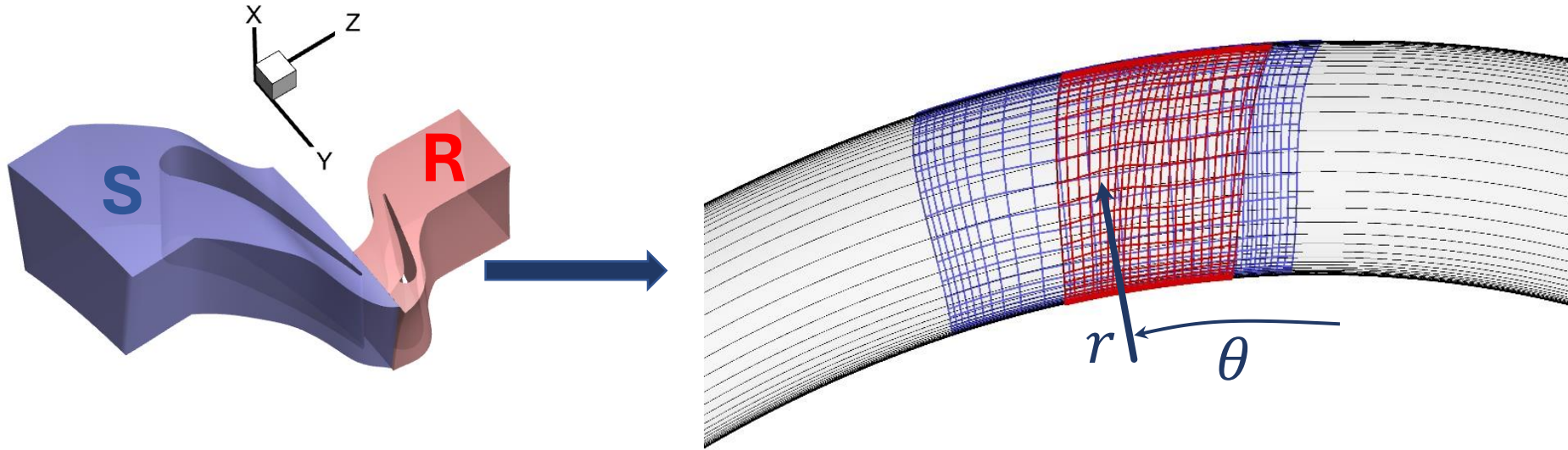
Матрица: внедиагональный блок

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>A.P. Duben, R.A. Zagitov, N.V. Shuvaev. Nonlinear Harmonics Method for Supercomputer Simulations of Fluid Dynamics in Turbomachines with Higher Accuracy on Unstructured Meshes // Lobachevskii Journal of Mathematics, No. 8 2024

<sup>2</sup>A.P. Duben, R.A. Zagitov, N.V. Shuvaev, O.V. Marakueva. Towards an adaptation of the nonlinear harmonics method realized in an unstructured flow solver for simulation of turbomachinery problems on supercomputers // Lecture Notes in Computer Science, 2024

# NLH на ротор-статор интерфейсах



- Осредненные переменные – по технологии Mixing Plane (MP)
  - MP – одна на ротор-статор интерфейс
- Функциональность MP используется для NLH
  - реализация – близкая к [1]
- На каждой итерации по времени
  - разложение в ряд Фурье по (своим) окружным гармоникам  $\omega_k$  с каждой из сторон, но для одних и тех же полос
  - формирование предраспадных значений для гармоник слева (с соседнего венца) и справа (из узла)
  - солвер Poу для вычисления потоков

<sup>1</sup>T. Chen, P. Vasanthakumar, and L. He, “Analysis of unsteady blade row interaction using nonlinear harmonic approach,” AIAA J. of Propulsion and Power 17 (3), 651–658 (2001).

# Тестирование МР: Rotor67 (1/2)



Совершенный газ:

( $C_p$  - const,  $\gamma$  - const)

Модель турбулентности: SST

RPM = 16 043 мин<sup>-1</sup>

Радиальный зазор 0.1016 мм

Ротор: 22 лопатки

**ГУ на входе:**

$P_0 = 101$  кПа

$T_0 = 288$  К

$V_z / |V| = 1$

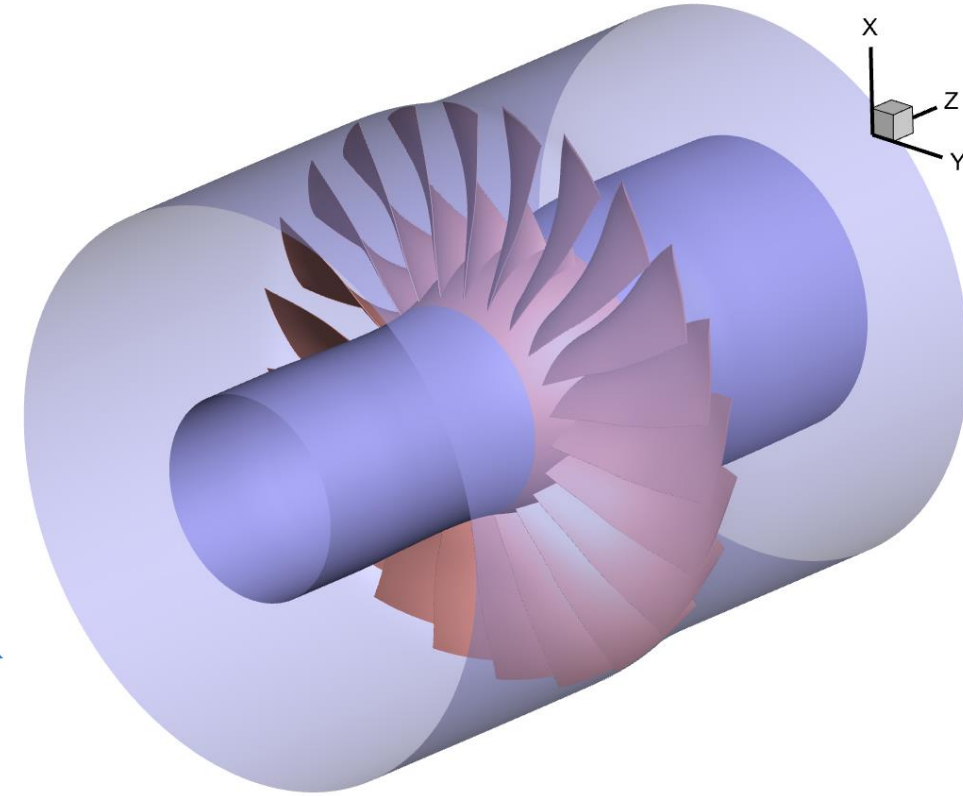
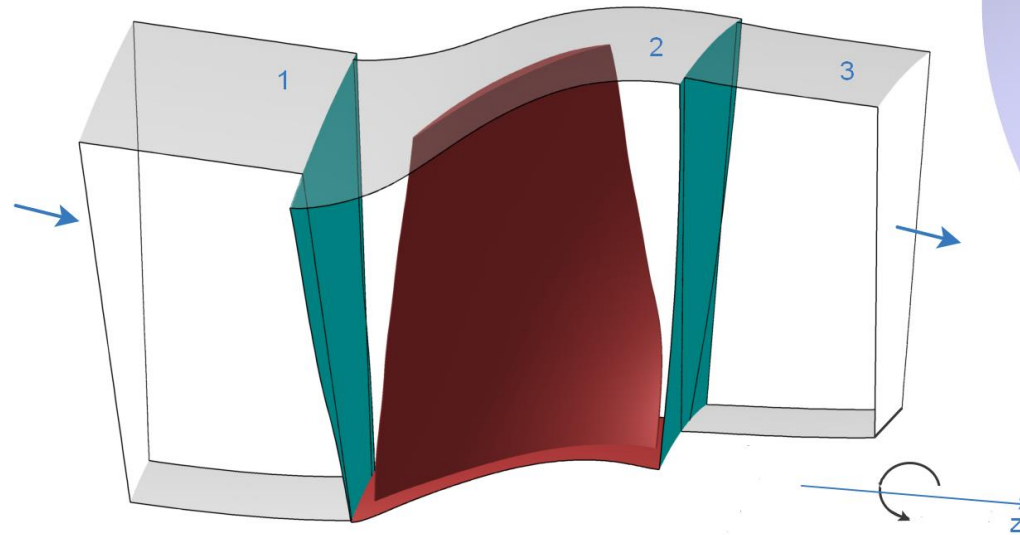
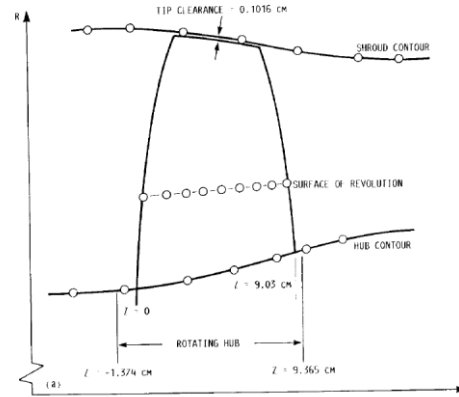
**ГУ на выходе:**

Варьирование  $P_2$  или  
массового расхода  $G$

**Сетка:** 3 млн. узлов

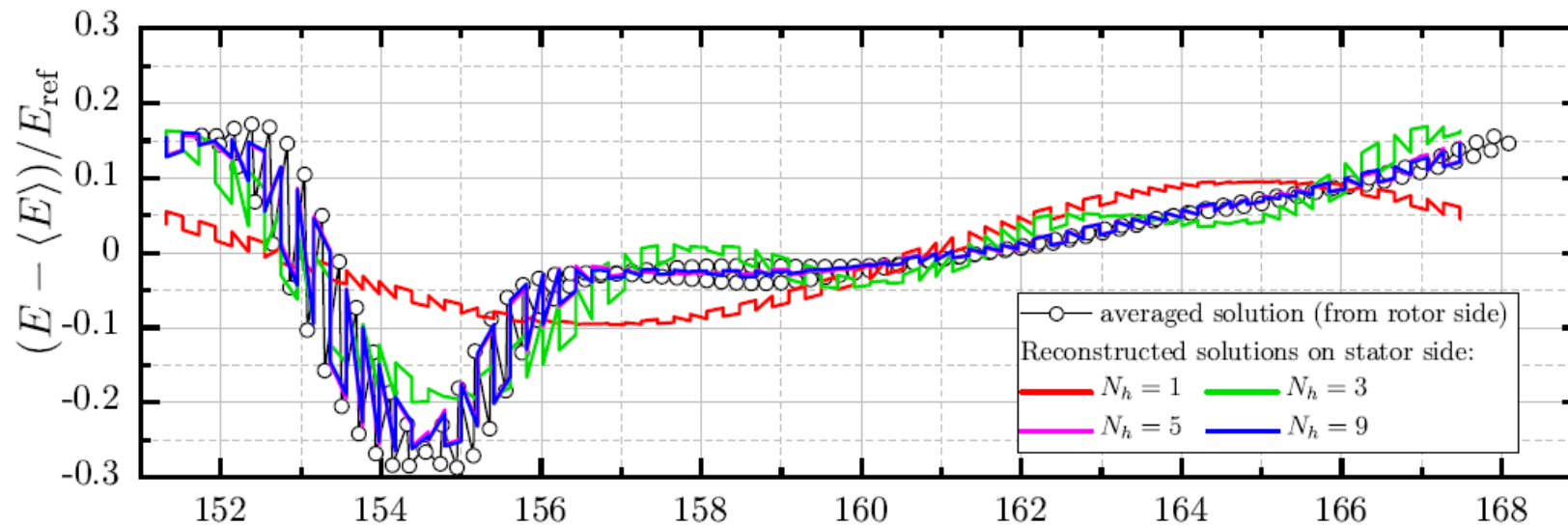
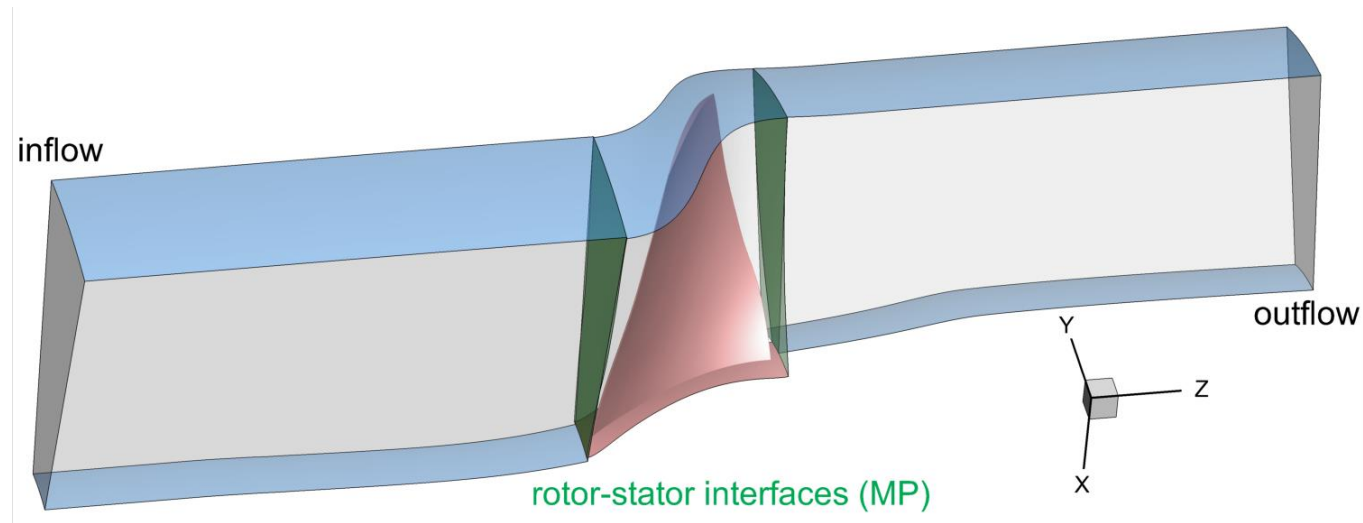
**Эксперимент:**

[Strazisar et al., 1989]



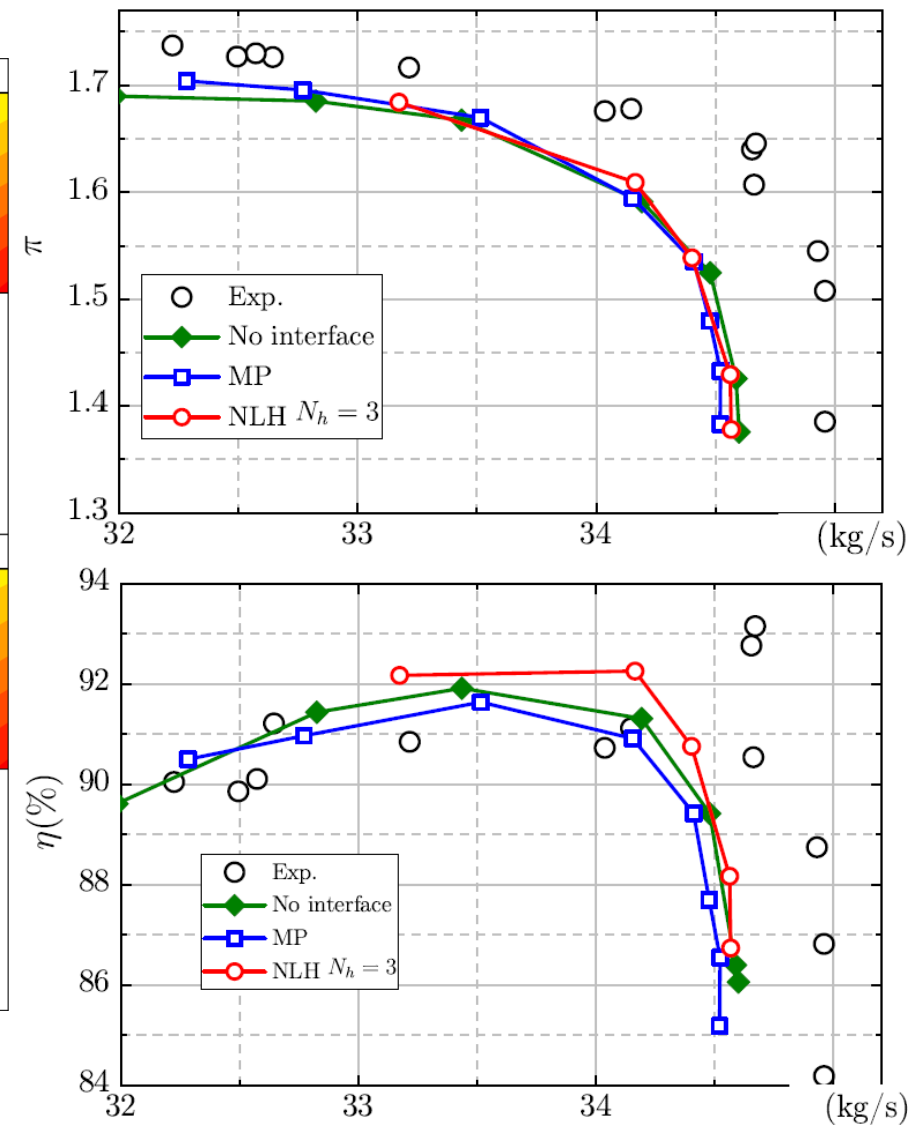
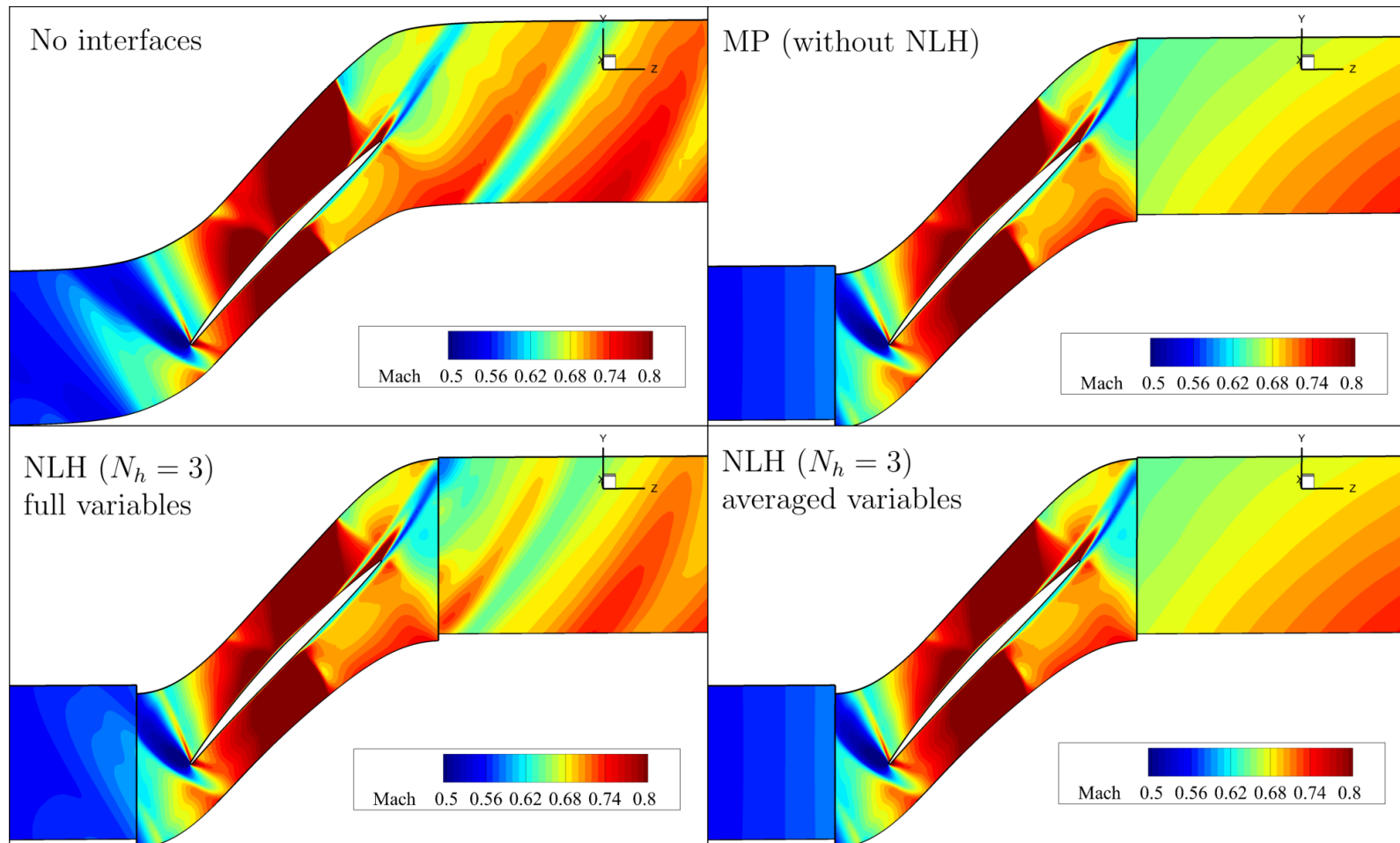
Strazisar A.J., Wood J.R., Hathaway M.D., Suder K.L. Laser anemometer measurements in a transonic axial-flow fan rotor // National Aeronautics and Administration, Langley research center. Hampton. Virginia. NASA. TP-2879. 1989. 214 p

# NLH: тестирование на Rotor67



Полная энергия на интерфейса (полоса MP 50% по радиусу)

# NLH: тестирование на Rotor67

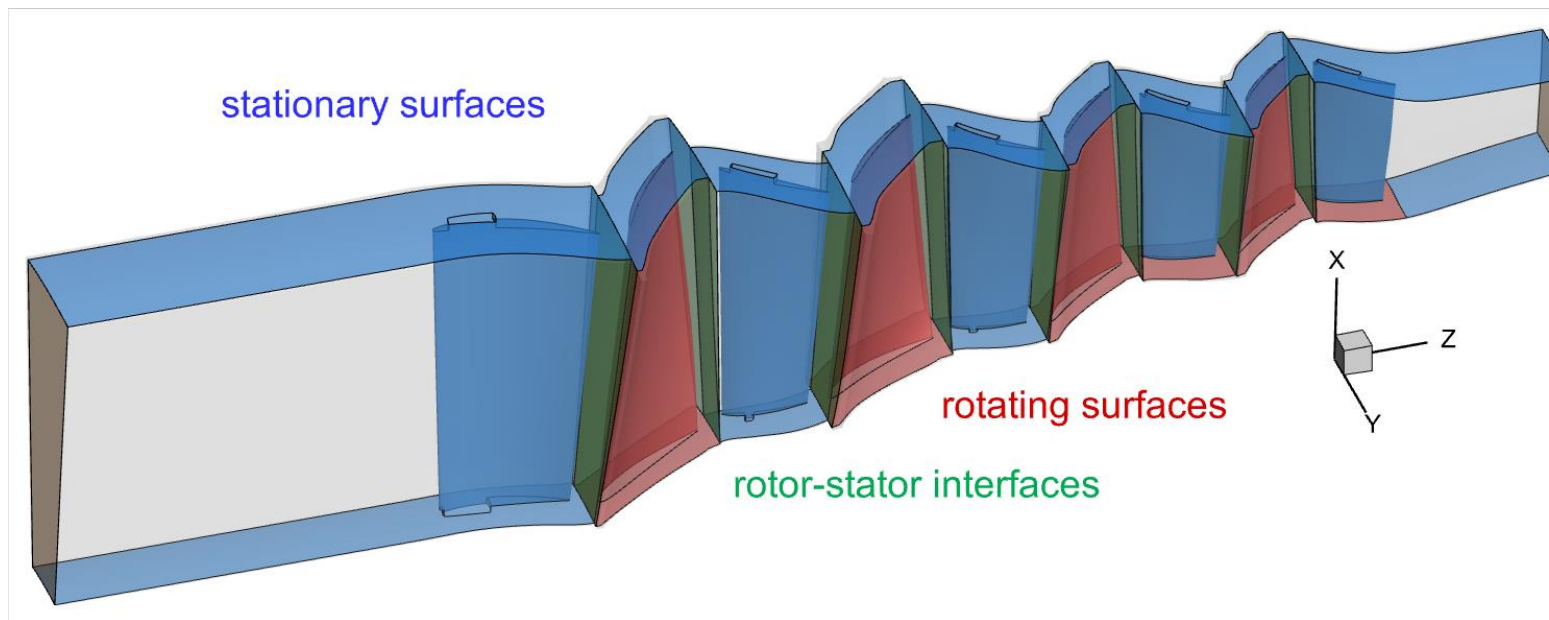


$$\pi = \frac{P_{t,2}}{P_{t,1}}, \quad \eta = \frac{(P_{t,2}/P_{t,1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{T_{t,2}/T_{t,1} - 1} \cdot 100\%$$

# NLH: тестирование на компрессоре ТВ3-117

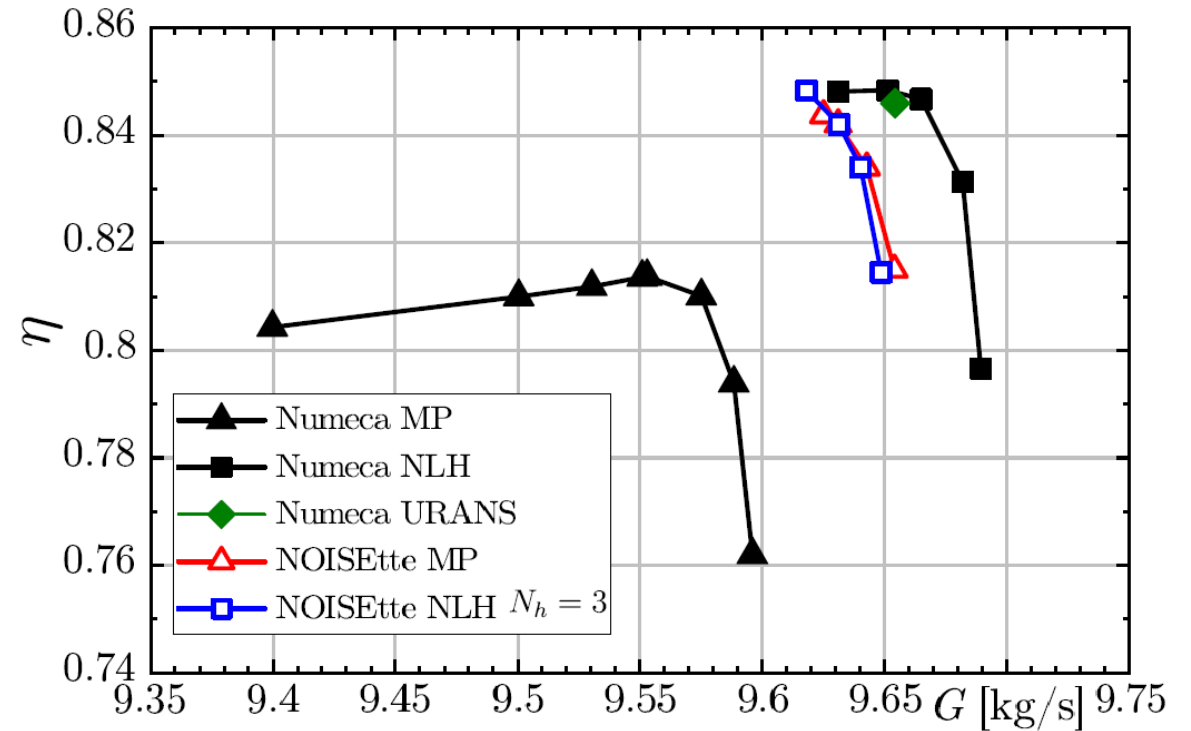
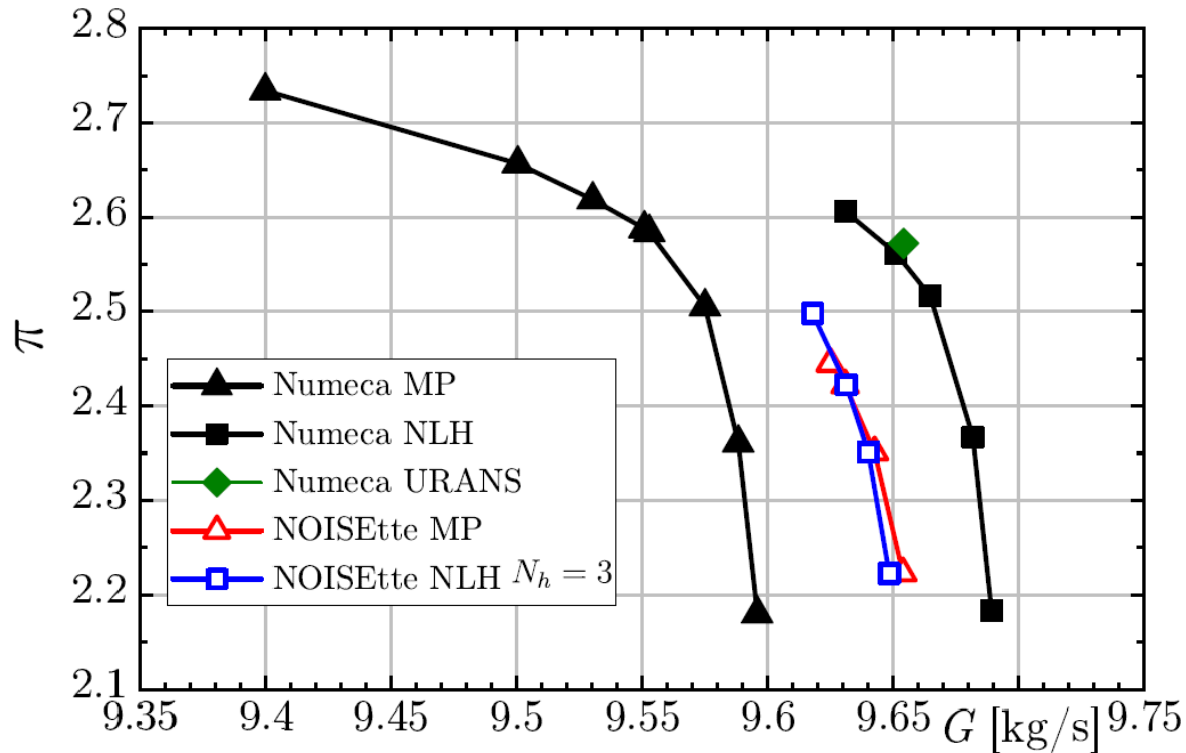


- 4 ступени 12-ступенчатый осевой компрессор вертолетного двигателя ТВ3-117 с отмасштабированным числом лопаток<sup>1</sup>
  - на входе  $P_t=101325$  Па,  $T_t=288.15$  К
  - $P_{out}$  на выходе варьируется
  - число лопаток 40 на ВНА и на 2 первых роторах, 60 – на остальных венцах
  - RPM=19500 об/мин
  - сетка – 12.6 млн. узлов



<sup>1</sup>Д.В. Ворошнин, О.В. Маракуева, А.С. Муравейко. Моделирование нестационарных явлений в осевом компрессоре // Мат. моделирование, 2019 год, том 31, номер 10, стр. 87-97

# NLH: тестирование на компрессоре ТВ3-117



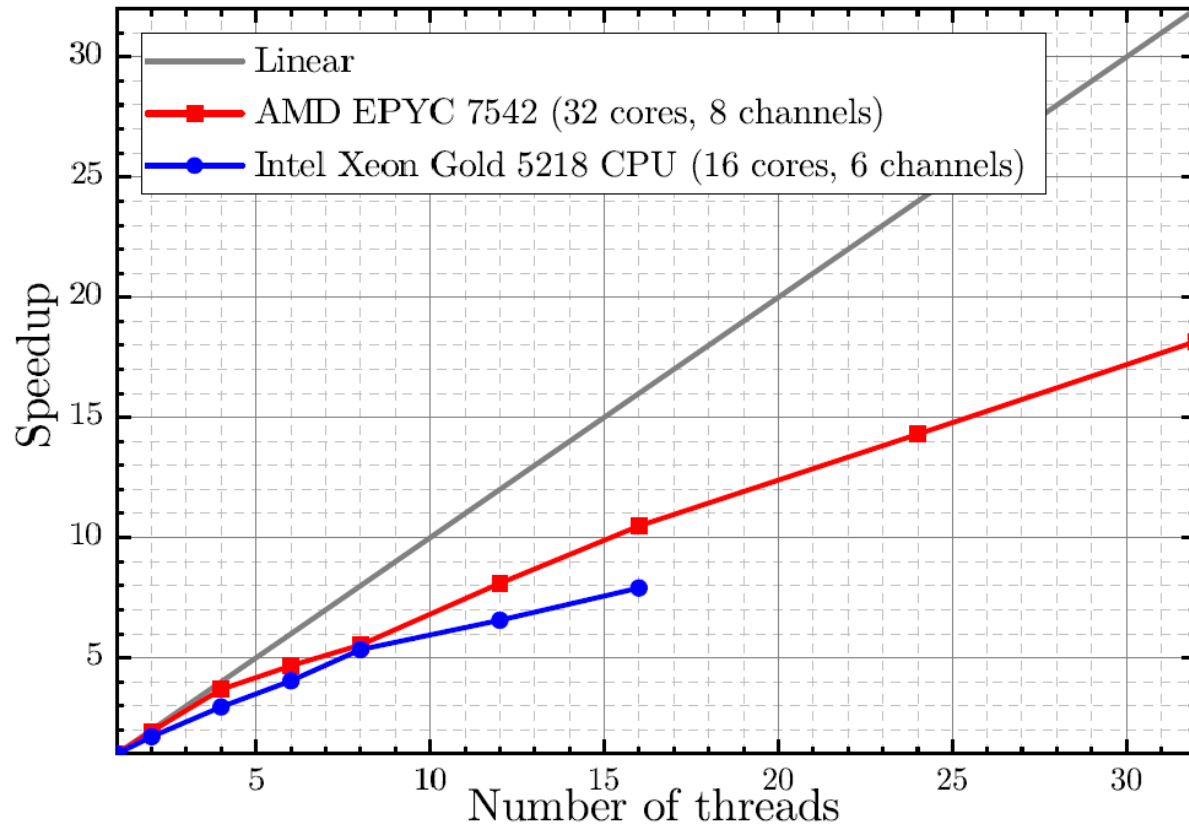
<sup>1</sup>Д.В. Ворошнин, О.В. Маракуева, А.С. Муравейко. Моделирование нестационарных явлений в осевом компрессоре // Мат. моделирование, 2019 год, том 31, номер 10, стр. 87-97



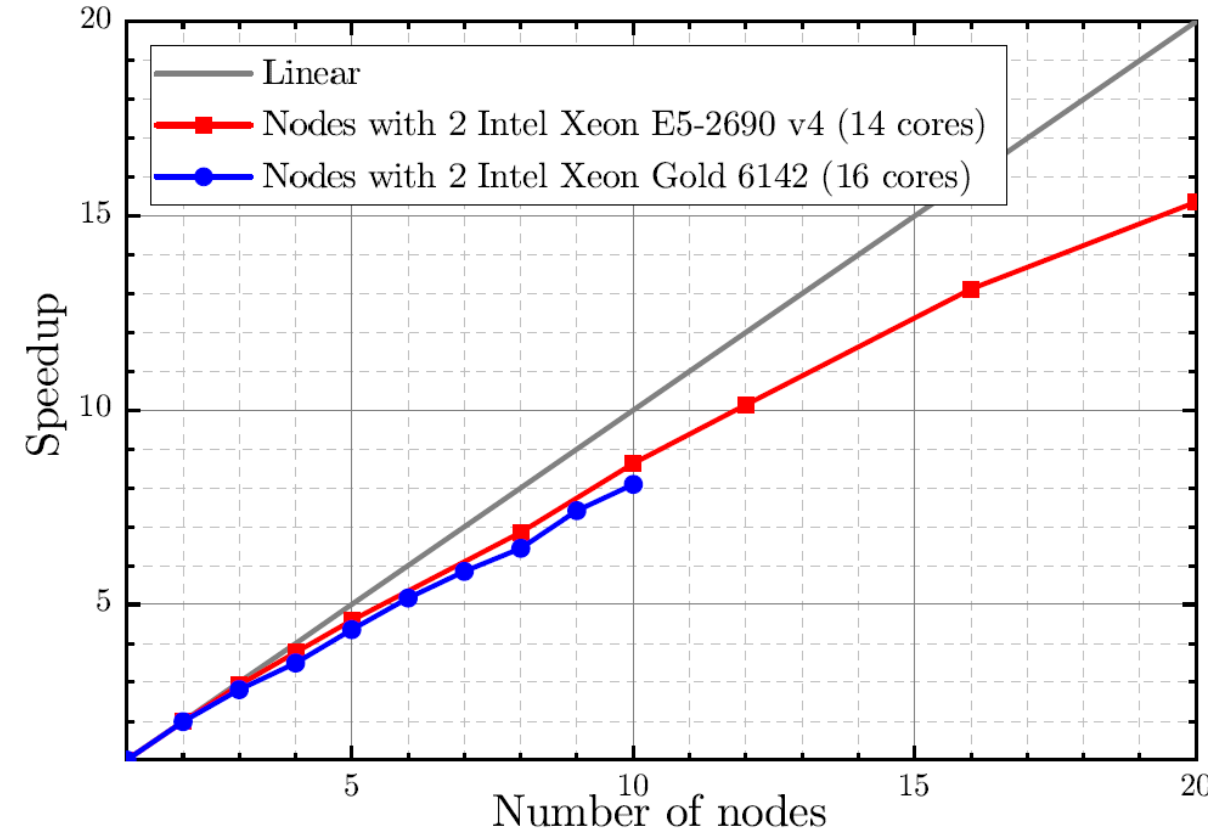
# NLH: распараллеливание



OpenMP на Rotor67 (3.78 млн. узлов)



MPI на ТВ3 (12.6 млн. узлов)



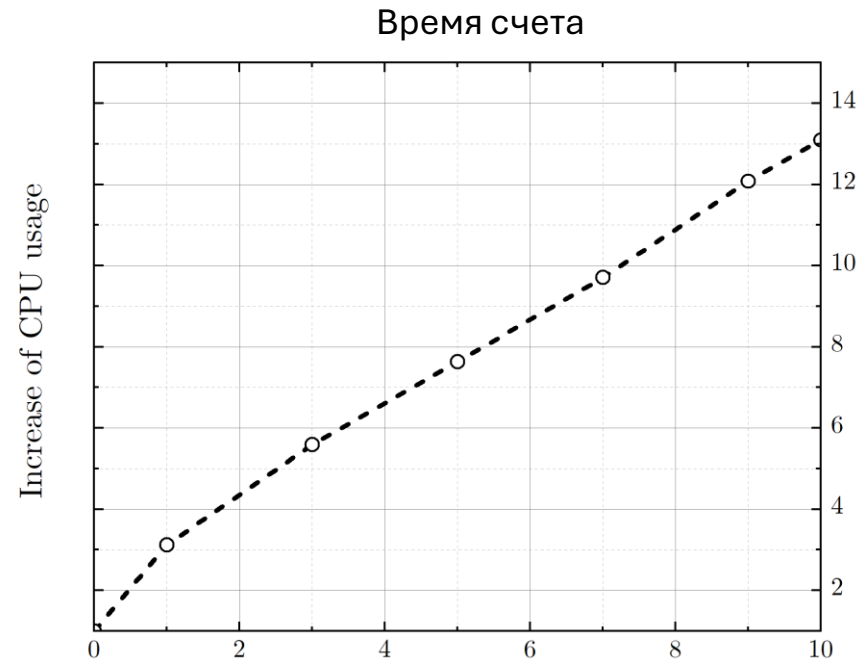
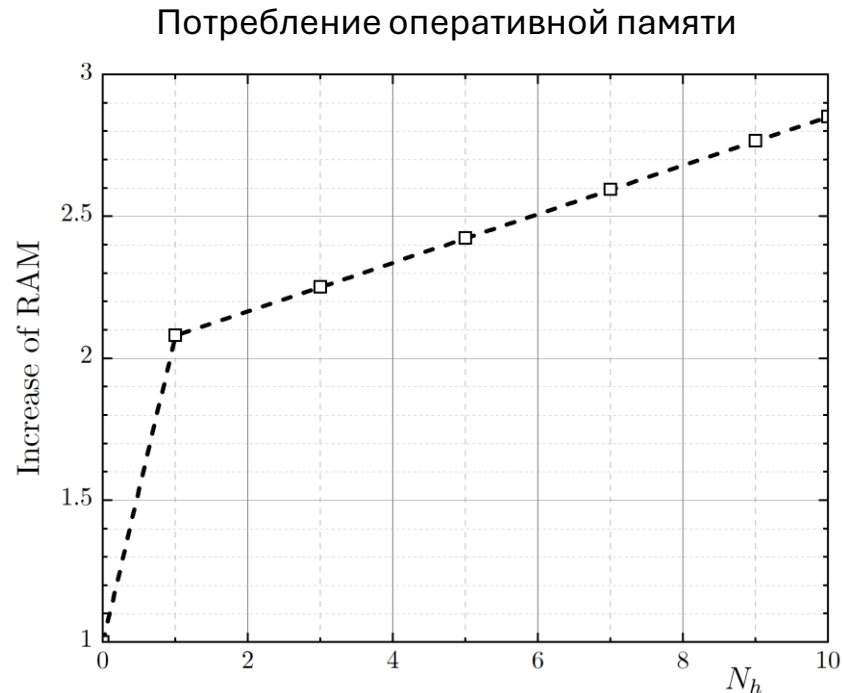
## Тестирование

- AMD EPYC 7542 32-cores, 8×DDR4-3200 205 ГБ/с
- Intel Xeon Gold 5218, 16C, 6×DDR4-2666 128 ГБ/с

# NLH: производительность



- Дальнейшая задача – перенос на GPU
  - скорость вычислений определяется скоростью чтения данных из RAM
  - основной «потребитель» RAM – матрица (25-30% для основных переменных с блоком 5×5)
- Тестирование – на Rotor67 (относительно MP, без NLH, сетка 3.78 млн. узлов., 2 интерфейса)
  - 25 шагов по неявной схеме
  - 14 GB RAM, ~26 секунд



Тестирование – на AMD EPYC 7542 32-cores CPU 8xDDR4-3200 205 ГБ/с

# NLH: производительность

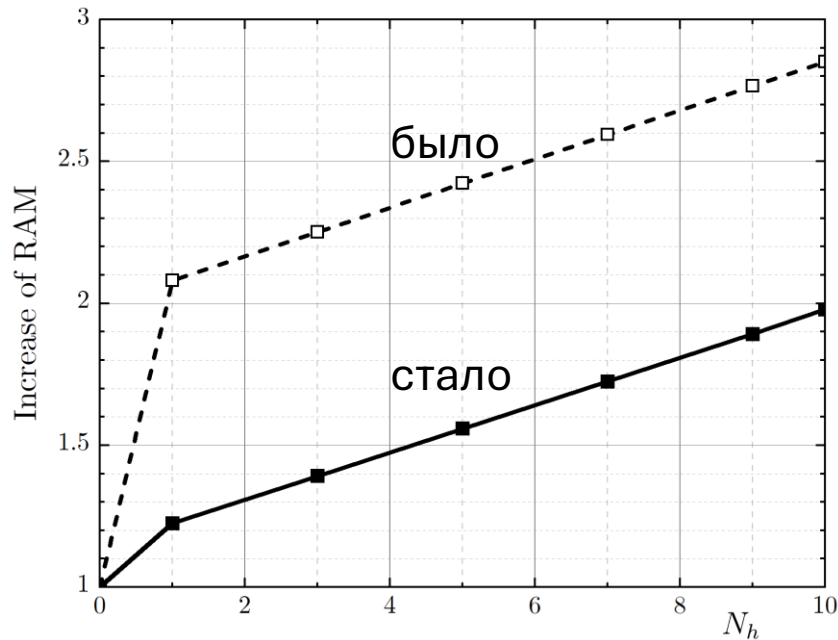


- Улучшения по производительности

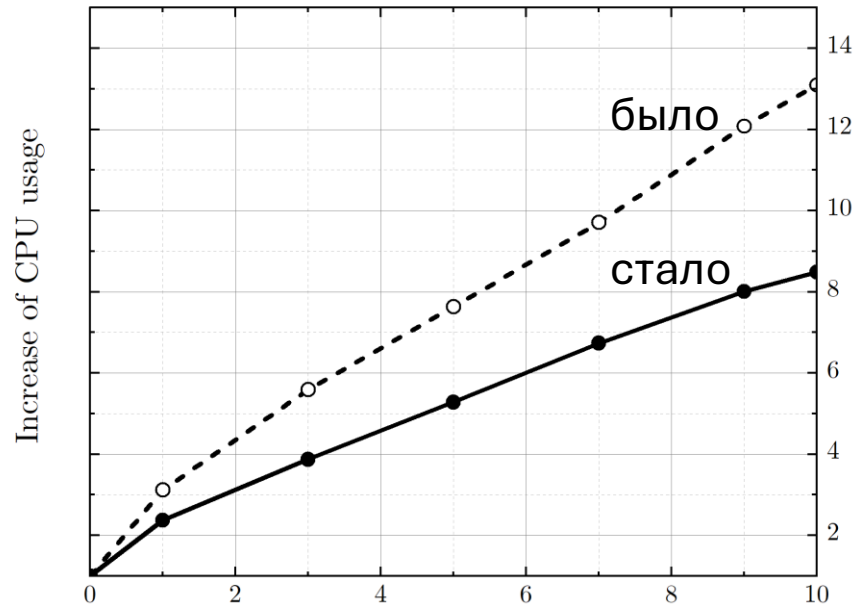
- матрица: блок  $10 \times 10 = 100 \rightarrow 5 \times 5 = 25 + 1 = 26$
- специальные ядра
  - для матрично-векторного произведения (SpMV)
  - для предобуславливателя (SpMV и обращение блока)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \blacksquare & \cdots & \blacksquare & -\omega_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \blacksquare & \cdots & \blacksquare & 0 & \cdots & -\omega_k \\ \omega_k & \cdots & 0 & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_k & \blacksquare & \cdots & \blacksquare \end{array} \right)$$

Потребление оперативной памяти



Время счета



# NOISEtte<sup>1,2</sup> для турбомашин сентябрь 2024



- Модели, методы, схемы и алгоритмы, реализованные в программном комплексе **NOISEtte**, ориентированные
  - на **RANS** и вихреразрешающее моделирование
  - задач внутренней и внешней аэродинамики и аэроакустики
  - на различных системах (от персоналки до суперкомпьютера, CPU, GPU)
  - на неструктурированных смешанных сетках
- RANS, LES и гибридные RANS-LES подходы
  - в том числе, с учетом ламинарно-турбулентного перехода (дифференциальные и алгебраические (**GPU**) модели на основе SST)
- Интегрирование по времени
  - неявный метод BDF1 и BDF2 (солвер BiCGSTAB)
  - с предобуславливателями<sup>3</sup> **GPU**
  - **FAS-MG** ускоритель<sup>4</sup> **GPU**
- Параллельный алгоритм – многоуровневое MPI+OpenMP+OpenCL распараллеливание
  - задействование до  $\sim 10^5$  CPU ядер, до  $\sim 100$  GPU без ощутимой потери эффективности
  - все «продуктовые» методы и модели – на **GPU**
- Технологии для турбомашин:
  - MP
  - NLH

<sup>1</sup>Abalakin, I. V., Bakhvalov, P. A. ., Bobkov, V. G., Duben, A. P., Gorobets, A. V., Kozubskaya, T. K., Rodionov, P. V., & Zhdanova, N. S. . (2024). NOISEtte CFD&CAA Supercomputer Code for Research and Applications. Supercomputing Frontiers and Innovations, 11(2), 78–101.

<sup>2</sup>Andrey Gorobets, Pavel Bakhvalov (2022). Heterogeneous CPU+GPU parallelization for high-accuracy scale-resolving simulations of compressible turbulent flows on hybrid supercomputers Computer Physics, Vol 271, 108231

<sup>3</sup>Магомедов А. Р., Горобец А. В. Гетерогенная реализация предобуславливателей на основе метода Гаусса–Зейделя для разреженной блочной матрицы. Труды «Прикладная математика и информатика» 2023. 72. 38–45.

<sup>4</sup>A. V. Gorobets. An Approach to the Implementation of the Multigrid Method with Full Approximation for CFD Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, Vol. 63, No. 11, pp. 2150–2161.

# Заключение



- Разработана технология NLH для нестационарного моделирования турбулентных течений в газотурбинных двигателях
  - реализовано на CPU (MPI+OpenMP параллельность)
  - проведена оптимизация

## В процессе

- Тестирование NLH на реальных задачах

## Планы на ближайшее будущее

- Перенос функциональности NLH на GPU
- Мультигрид для NLH
- NLH: «псевдо ранг 2» (overclocking в Numeca Fine/Turbo)

- 
- Работа выполнена в рамках проекта **РНФ № 21-71-10100**

- Расчеты проводились на оборудовании:
  - ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН