



Multigrid methods with block bisection for solving grid boundary value problems

Баталов М.А. Гурин А.М. Ильин В.П.

m.batalov@g.nsu.ru

Работа поддержана грантом РФФ №24-21-00402

Сентябрь, 2025

$$Au = f, \quad A = A^T > 0, \quad u = \{u_t\}, \quad f = \{f_t\} \in \mathcal{R}^N,$$

$$\Omega_1^h : x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{j+1} = y_j + h, \quad z_{k+1} = z_k + h; \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Omega_2^h : x_{i+2} = x_i + 2h, \quad y_{j+2} = y_j + 2h, \quad z_{k+2} = z_k + 2h; \quad i, j, k = 0, 2, 4, \dots,$$

$$\Omega_1^h = \Omega_1^1 \cup \Omega_1^2 \cup \Omega_1^3 \cup \Omega_1^4, \quad \Omega_1^4 = \Omega_2^h$$

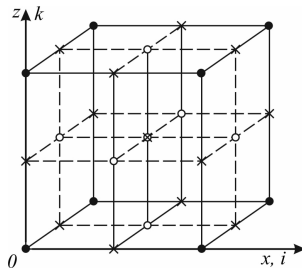


Рис. 1: Обозначения узлов двухуровневого метода на кубических сетках

$$\begin{aligned}
 (Au)_{i,j,k} &= 6u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i,j-1,k} - \\
 &\quad - u_{i+1,j,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k-1} - u_{i,j,k+1} = \bar{f}_{i,j,k}, \\
 i &= 1, 2, \dots, N_x; \quad j = 1, 2, \dots, N_y; \quad k = 1, 2, \dots, N_z;
 \end{aligned}$$

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 \\ 0 & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ 0 & 0 & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{f}_4 \end{bmatrix},$$

$$u, f \in \mathcal{R}^N, \quad N = N_x N_y N_z,$$

$$\bar{u}_s, \bar{f}_s \in \mathcal{R}^{N_s}, \quad s = 1, 2, 3, 4$$

$$\Omega^h = \Omega_1^h = \hat{\Omega}_1^h \cup \check{\Omega}_1^h, \quad \check{\Omega}_1^h = \Omega_2^h,$$

$$u = u^{(1)} = \left((\hat{u}^{(1)})^\top, (\check{u}^{(1)})^\top \right)^\top, \quad \check{u}^{(1)} = u^{(2)}.$$

$$\Omega^h = \Omega_1^h = \hat{\Omega}_1^h \cup \hat{\Omega}_2^h \dots \cup \hat{\Omega}_{m-1}^h \cup \Omega_m^h,$$

$$u = u^{(1)} = \left((\hat{u}^{(1)})^\top, (\hat{u}^{(2)})^\top, \dots, (\hat{u}^{(m-1)})^\top, (u^{(m)})^\top \right)^\top,$$

$$\Omega_l^h = \hat{\Omega}_l^h \cup \check{\Omega}_l^h, \quad \check{\Omega}_l^h = \Omega_{l+1}^h, \quad u^{(l)} = \left((\hat{u}^{(l)})^\top, (\check{u}^{(l)})^\top \right)^\top, \quad \check{u}^{(l)} = u^{(l+1)}.$$

$$Au = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}^{(1)} \\ f^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Структура многосеточного метода.

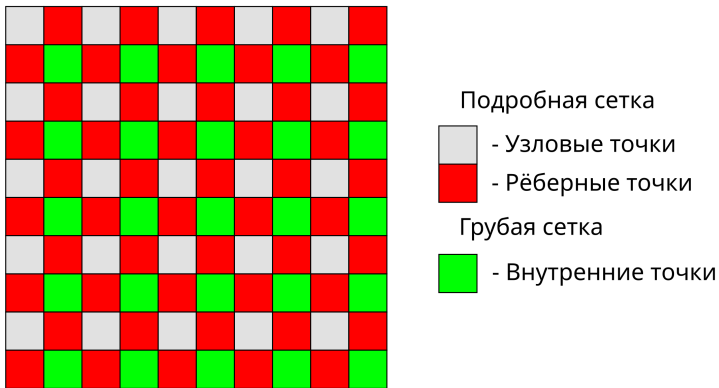


Рис. 2: Разбиение на первом уровне расчетной сетки.

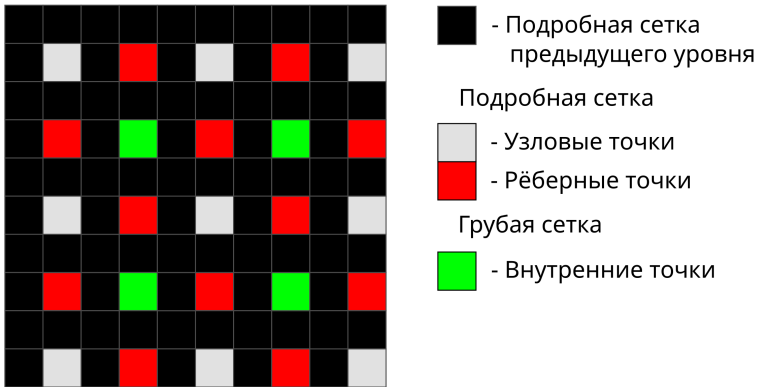


Рис. 3: Разбиение на втором уровне расчетной сетки.

$$A^{(l)} \approx \begin{bmatrix} G_1^{(l)} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1}^{(l)} & G_2^{(l)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{3,2}^{(l)} & G_3^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & A_{4,3}^{(l)} & G_4^{(l)} \end{bmatrix} (G^{(l)})^{-1} \begin{bmatrix} G_1^{(l)} & A_{1,2}^{(l)} & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & A_{2,3}^{(l)} & 0 \\ 0 & 0 & G_3^{(l)} & A_{3,4}^{(l)} \\ 0 & 0 & 0 & G_4^{(l)} \end{bmatrix},$$

$$G_1^{(l)} = A_{1,1}^{(l)}, \quad G_2^{(l)} = A_{2,2}^{(l)} - (A_{2,1}^{(l)}(G_1^{(l)})^{-1}A_{1,2}^{(l)})_1 - \theta_2 S_2^{(l)},$$

$$S_2^{(l)} e_2 = \left[A_{2,1}^{(l)}(G_1^{(l)})^{-1}A_{1,2}^{(l)} - (A_{2,1}^{(l)}(G_1^{(l)})^{-1}A_{1,2}^{(l)})_1 \right] e_2,$$

$$G_3^{(l)} = A_{3,3}^{(l)} - (A_{3,2}^{(l)}(G_2^{(l)})^{-1}A_{2,3}^{(l)})_1 - \theta_3 S_3^{(l)},$$

$$S_3^{(l)} e_3 = \left[A_{3,2}^{(l)}(G_2^{(l)})^{-1}A_{2,3}^{(l)} - (A_{3,2}^{(l)}(G_2^{(l)})^{-1}A_{2,3}^{(l)})_1 \right] e_3,$$

$$G_4^{(l)} = A_{4,4}^{(l)} - A_{4,3}^{(l)}(G_3^{(l)})^{-1}A_{3,4}^{(l)}.$$

$\theta_i, \in [0, 1]$ – параметр компенсации, G_1, G_2, G_3 – диагональные.

Рестрикция

$$G_1 v_1^n = r_1^n$$

$$G_2 v_2^n = r_2^n - A_{2,1} v_1^n$$

$$G_3 v_3^n = r_3^n - A_{3,2} v_2^n$$

Пролонгация

$$G_3 w_3^n = A_{3,4} q_4^{n+1}; \quad q_3^{n+1} = v_3^n - w_3^n;$$

$$G_2 w_2^n = A_{2,3} q_3^{n+1}; \quad q_2^{n+1} = v_2^n - w_2^n;$$

$$G_1 w_1^n = A_{1,2} q_2^{n+1}; \quad q_1^{n+1} = v_1^n - w_1^n;$$

Решение на грубой сетке

$$G_4 v_4^n = r_4^n - A_{4,3} v_3^n; \quad q_4^{n+1} = v_4^n;$$

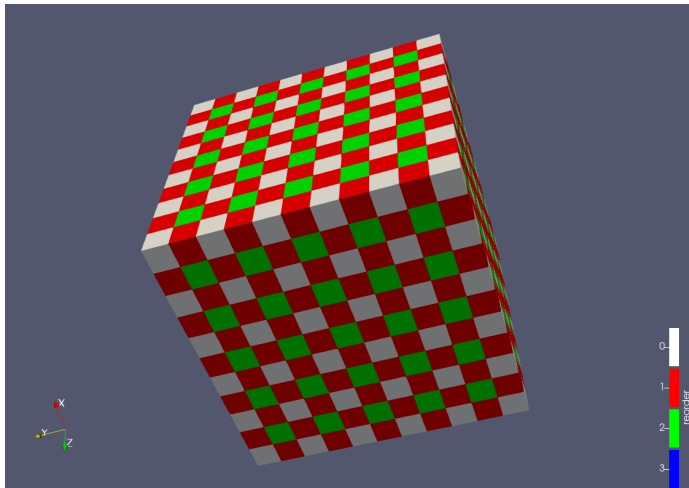


Рис. 4: Кубик с полостью

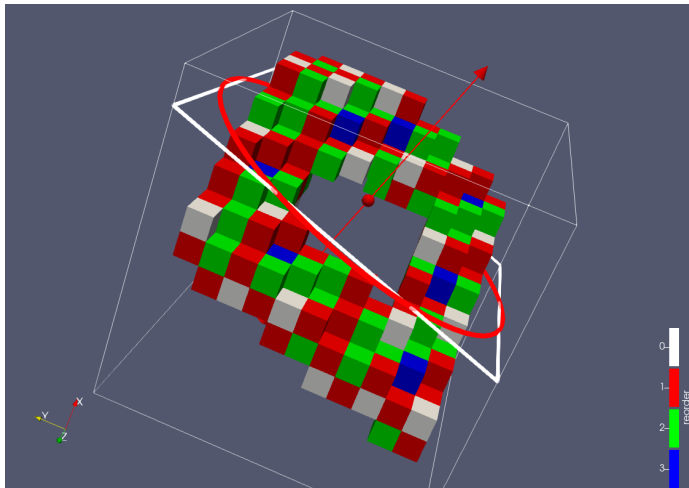


Рис. 5: Срез куба

В качестве тестового примера бралось уравнение Пуассона $\Delta u = f$ в единичном кубе на равномерной неструктурированной сетке, краевые условия на противоположных гранях куба брались одинаковыми: $u = 1, 2, 3$, начальное приближение $u^0 = 0$ и критерий окончания счета по величине относительной невязки $\epsilon = 10^{-7}$.

Комментарии к серии таблиц:

m – число сеток,

n – количество итераций,

t_1 – время выполнения итераций в секундах,

t_2 – время подготовки LU разложения,

t_3 – время предварительной подготовки алгоритма,

t – суммарное время решения задачи.

128^3					
m	3	4	5	6	7
$n(K_{0,0})$	35	74	147	221	234
$t(K_{0,0})$	6,646	6,293	10,945	15,565	16,532
$n(K_{0,1})$	32	71	144	470	211
$t(K_{0,1})$	6,888	6,854	12,459	36,17	17,429
$n(K_{2,0})$	21	25	29	31	31
$t(K_{2,0})$	4,672	3,745	3,92	4,077	4,207
$n(K_{2,1})$	16	17	17	17	17
$t(K_{2,1})$	4,264	3,316	3,077	3,094	3,659

Таблица 1: сравнение разных алгоритмов на сетке 128^3

63^3							H
m	2	3	4	5	6	7	-
n	16	17	17	17	17	17	10
t_1	0,341	0,263	0,256	0,249	0,276	0,336	0,403
t_2	0,501	0,49	0,001	0	0	0	0
t_3	0,161	0,181	0,184	0,178	0,182	0,175	0,495
t	1,003	0,934	0,441	0,427	0,458	0,511	0,898

Таблица 2: Результаты экспериментов для Алгоритма 2 ($K_{2,1}$ -циклы) и сравнение с *BoomerAMG* (правый столбец H) для сетки $N = 63^3$

128^3								H
m	2	3	4	5	6	7	8	-
n	15	16	17	17	17	17	17	10
t_1	3,856	1,581	1,801	1,701	1,727	2,086	2,188	4,066
t_2	16,935	1,17	0,117	0,002	0,001	0	0	0
t_3	1,993	1,513	1,398	1,374	1,366	1,573	1,578	4,903
t	22,784	4,264	3,316	3,077	3,094	3,659	3,766	8,969

Таблица 3: Результаты экспериментов для Алгоритма 2 ($K_{2,1}$ -циклы) и сравнение с *BoomerAMG* (правый столбец H) для сетки $N = 128^3$

Численные эксперименты для сетки 256^3

256^3							H
m	3	4	5	6	7	8	-
n	16	16	17	17	17	17	10
t_1	14,703	16,414	18,14	17,747	17,263	16,59	33,887
t_2	29,089	2,526	0,37	0,001	0,001	0,001	0
t_3	13,856	14,146	14,022	13,788	13,261	13,673	46,84
t	57,648	33,086	32,532	31,536	30,525	30,264	80,727

Таблица 4: Результаты экспериментов для Алгоритма 2 ($K_{2,1}$ -циклы) и сравнение с *BoomerAMG* (правый столбец H) для сетки $N = 256^3$

Сравнение Hypr BoomerAMG

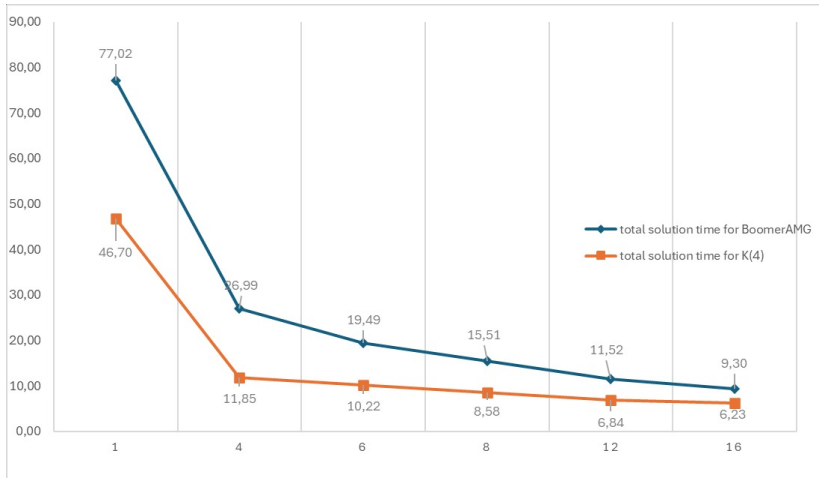


Рис. 6: Полное время решения уравнения Лапласа на сетке 256^3 в секундах в зависимости от количества ядер.

p	1	4	6	8	12	16
t_1	25.54	5.97	5.37	4.64	3.86	3.62
	50.84	16.12	11.50	9.39	7.27	6.06
$t_2 + t_3$	21.17	5.88	4.85	3.93	2.98	2.61
	26.18	10.87	7.99	6.13	4.25	3.24
t	46.70	11.85	10.22	8.58	6.84	6.23
	77.02	26.99	19.49	15.51	11.52	9.30
E	1.00	1.07	0.79	0.69	0.55	0.44
	1.00	0.71	0.66	0.62	0.56	0.52

Таблица 5: Время решения СЛАУ для разного числа ядер на одном узле p , $N = 256^3$, верхнее число – $K_{2,1}$ четырех-сеточный, нижнее число – *HYPRE*

- Разработан многосеточный алгоритм эксплуатирующий ijk структурированную сетку для построения закругления
- Исходный оператор разбит на четыре независимых множества
- Проведено сравнение в Hypre BoomerAMG
- В дальнейшем предполагается применить алгоритм к решению уравнений Стокса, Кана-Хиллиарда и Кана-Хиллиарда-Стокса



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!