Международная конференция
"Суперкомпьютерные дни в России",
29-30 сентября 2025 г.

Особенности решения обратных задач волноводной томографии на суперкомпьютерах

Беляев А.С., Гончарский А.В., **Романов С.Ю.**
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, НИВЦ, Москва

Ультразвуковая томография

- Волновая томография или full waveform inversion (FWI) — метод неразрушающего исследования внутренней структуры объекта контроля.
- Основные применения — медицинская визуализация и неразрушающий контроль.
- Основные виды: 2D-томография, послойная 2.5D и 3D томография.
- Особенности: зондирование объекта со всех сторон. Реконструкция с использованием как прошедших, так и отраженных волн.
- Томографический ультразвуковой неразрушающий контроль сварных соединений, коррозия, дефекты труб и металлического листа.

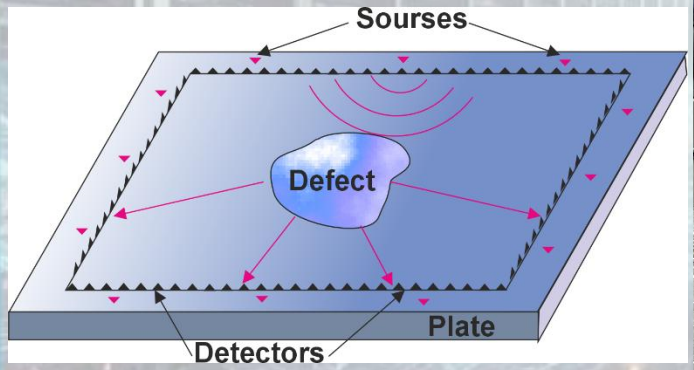


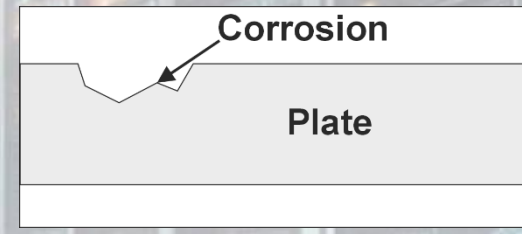
Схема томографического эксперимента

Устройство сканирования Ду300 на ультразвуковых антенных решётках, "НПЦ неразрушающего контроля "ЭХО+"

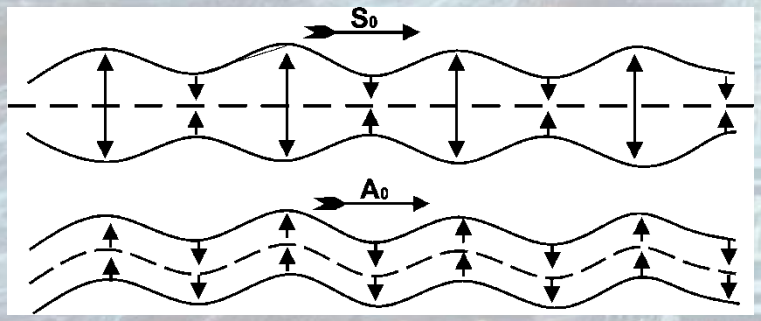
Ультразвуковая guided wave томография дефектов

Дефект – изменение толщины пластины.
Важное свойство волн Лэмба - фазовая скор. зависит от толщины пластины.
Наиболее простой вариант - использование моды A_0.

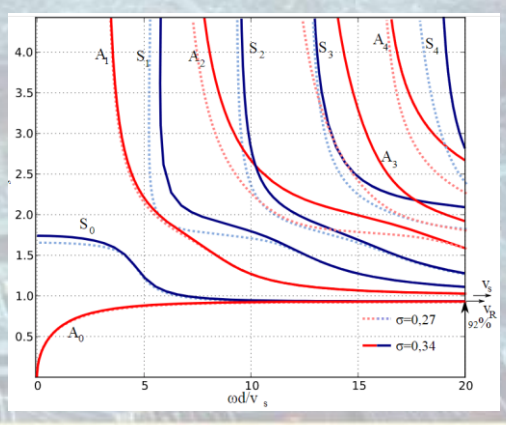
Примеры коррозии металлических пластин



Модель дефекта – изменение толщины пластины



Колебания частиц в волнах Лэмба моды So и Ao



Дисперсионные кривые волн Лэмба разных мод S и A

Постановка прямой задачи guided wave томографии

Уравнения динамической теории упругости для изотропной идеально упругой среды в R^3

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = div\,\sigma \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\mu(x)\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \lambda(x) div\,u\,I + f \end{cases}$$

начальные данные $u(x, t = 0);\ \sigma(x, t = 0) = 0.$

условия свободной поверхности на границе

$\sigma_{ij}|_\Gamma = 0, i, j = 1, 2, 3.$

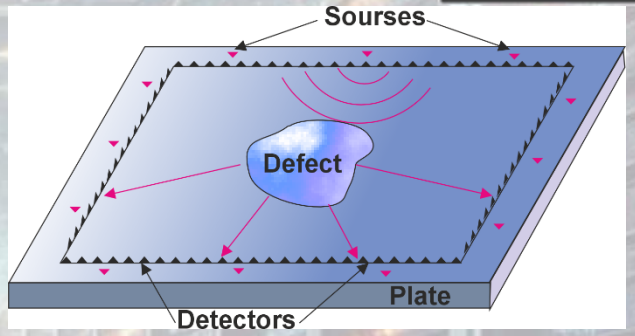
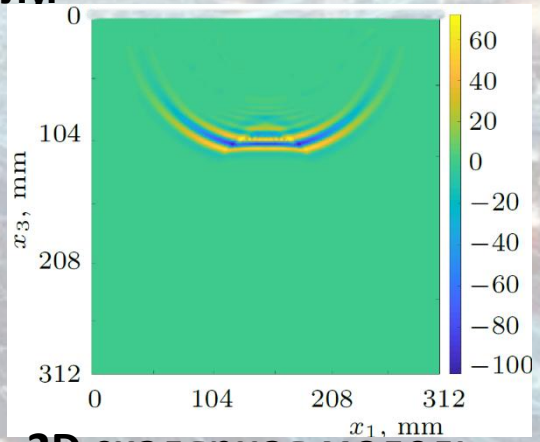


Схема томографического эксперимента

Здесь $u(r, t)$ - вектор скорости сдвига, σ — тензор напряжений размером 3×3; ε — тензор деформации; I — единичная матрица; $\mu(x)$, $\lambda(x)$ — коэффициенты Ламе; ρ — объемная плотность; f — тензор, задающий внешнюю силу.

В строгой постановке для решения обратной задачи надо использовать 3D модель. Однако такая постановка сопряжена с огромного количества вычислений.

Распространение вертикальных колебаний на поверхности волн Лэмба A_0 будем с некоторыми допущениями описывать с помощью 2D скалярной модели.



2D скалярная модель

Постановка обратной задачи guided wave томографии

- Скорости распространения волн моды A_0 зависит от частоты. Поэтому в скалярной модели используем уравнение Гельмгольца в 2D :

$$\Delta_r u(q_j, w, r,) + \left(w/c(w, d(r))\right)^2 u(q_j, w, r,) = F\,\delta(r - q_j)$$

На границе расчетной области ставим условие неотражения.

- Обратная 2D задача ставится как поиск толщины $\bar{d}(r)$ минимизирующей функционал невязки $\Phi(d(r))$

$$\Phi(d(r)) = \sum_{j=1}^{N} \int_W \int_S \left(u\left(q_j, w, s, d(r)\right) - U(q_j, w, s)\right)^2 ds\, dw.$$

Здесь $U(q_j, w, s)$- экспериментальные данные.

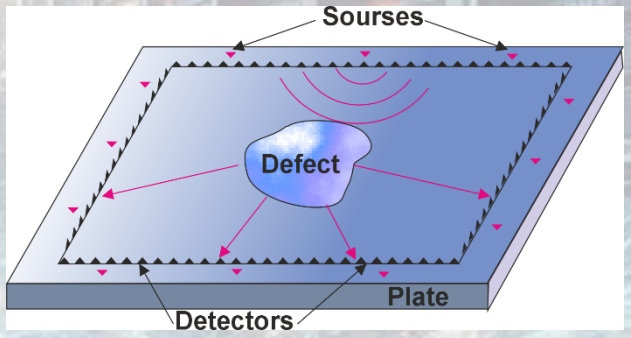


Схема томографического эксперимента

Градиент функционала

$$\Phi'_d(d(r)) = \frac{\delta\Phi(d(r))}{\delta d(r)} =$$

$$\int_W \frac{2c_0^2(w)}{c^3(w,d(r))} \frac{\delta c(w,d(r))}{\delta d(r)} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{w}{c_0(w)}\right)^2 Re\left(u\left(q_j, w, r, d(r)\right) z\left(q_j, w, r, d(r)\right)\right) dw,$$

где $z\left(q_j, w, r, d(r)\right)$ – решение сопряженной задачи,

$c(w, d(r))$ и ее производную находим из дисперсионной кривой.

Итерационный метод решения обратной задачи

Итерационный метод состоит из следующих этапов:

1. Начальное приближение на первой итерации задается как *d(r) = do = const*, где *do* - толщина пластины без дефектов.

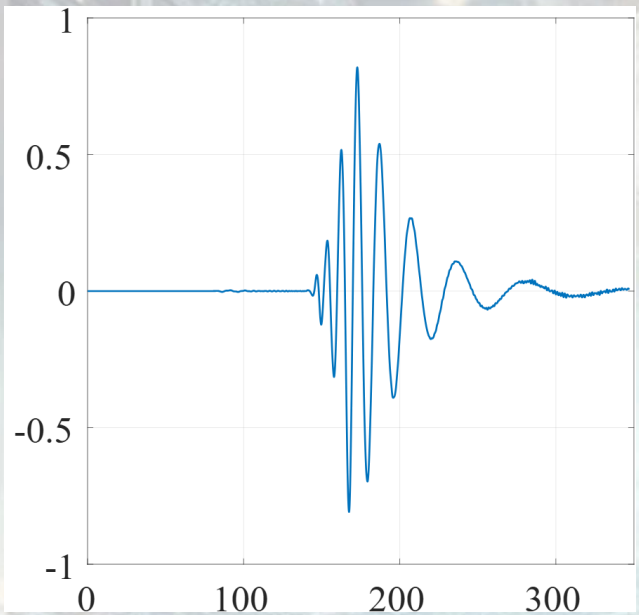
2. Для заданного *d(r)* решается прямая задача и вычисляется волновое поле в на детекторах.

3. Используя значения волнового поля на детекторах, найденное при решении прямой задачи, решается сопряженная задача.

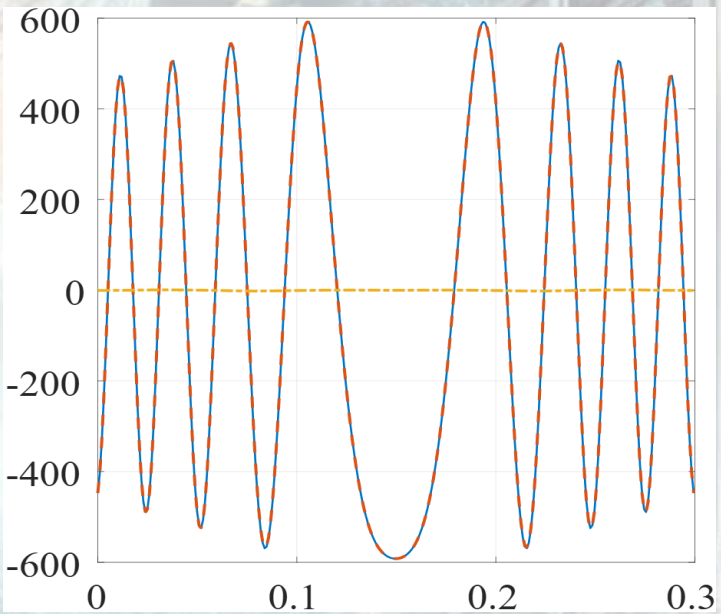
4. Вычисляется градиент функционала.

5. Зная градиент, мы вычисляем следующее приближение. Процесс переходит к шагу 2.

Нахождение параметров источников

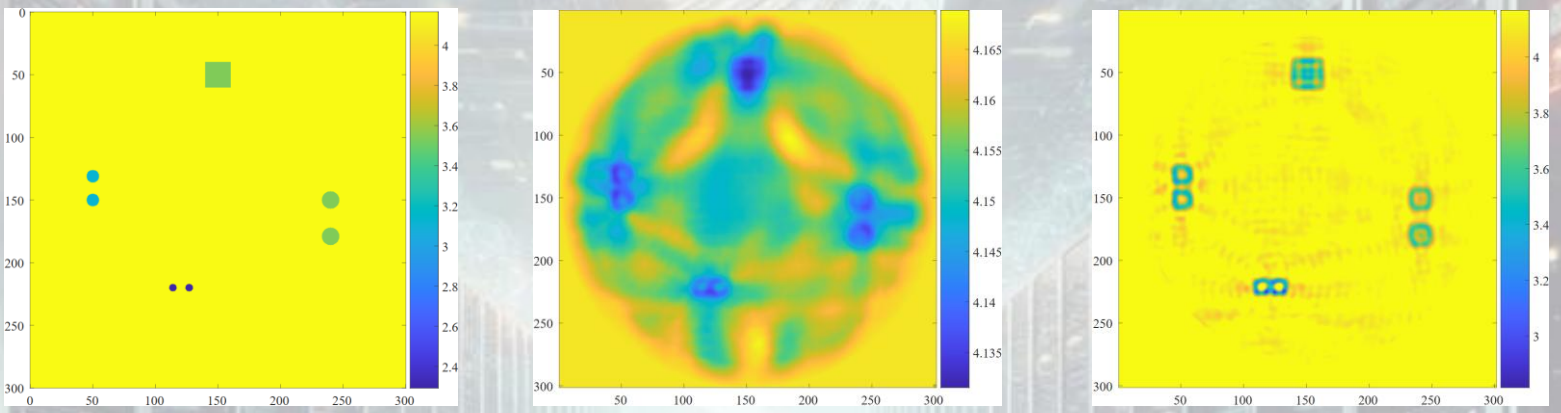


Записанный сигнал детектора

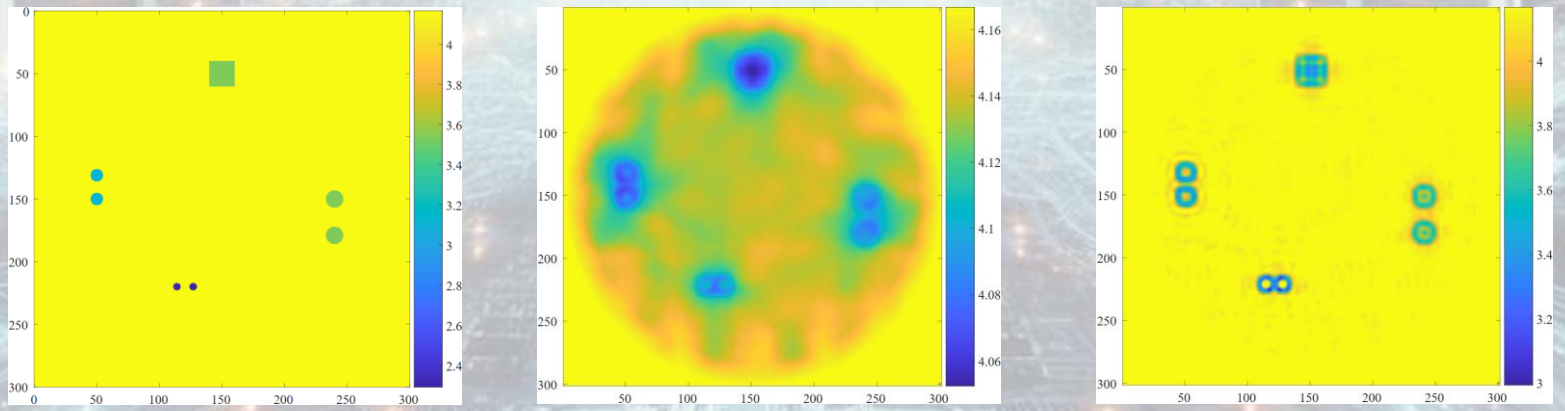


Действительные части спектра сигнала вдоль линии детекторов . Синяя сплошная линия – векторная модель, красная пунктирная линия – скалярная модель, штрих-пунктирная линия – разница между моделями

Модельная реконструкция точечных дефектов

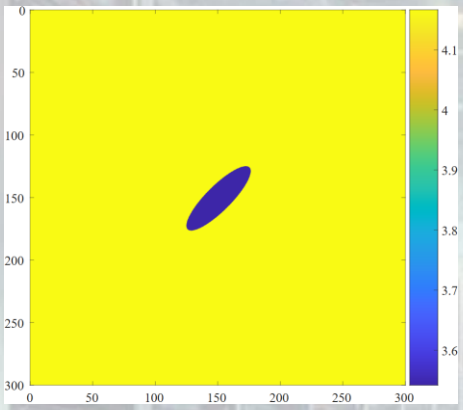


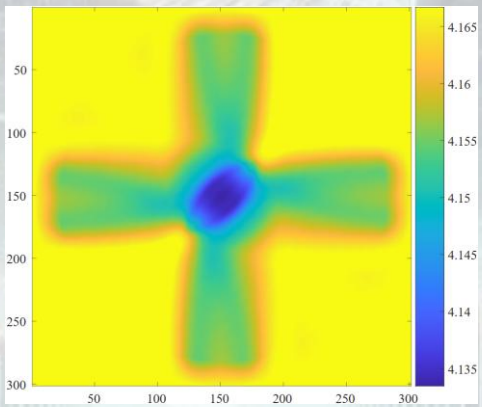
Модельный эксперимент 1. Фантом, градиент и восстановленное изображение для 27 частот и 4 источников

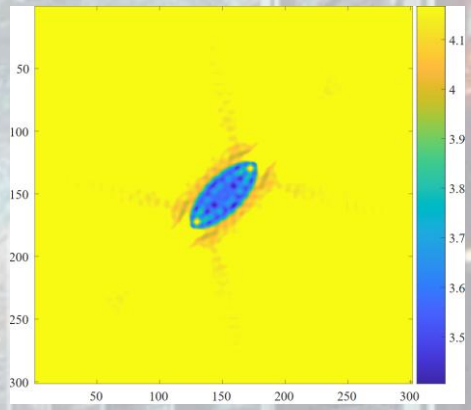


Модельный эксперимент 2. Фантом, градиент и восстановленное изображение для 27 частот и 12 источников

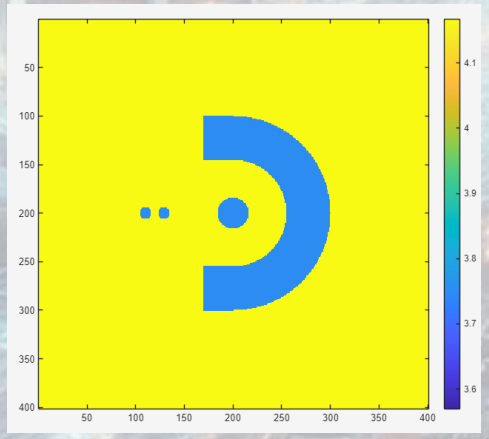
Модельная реконструкция протяженных дефектов сложной формы

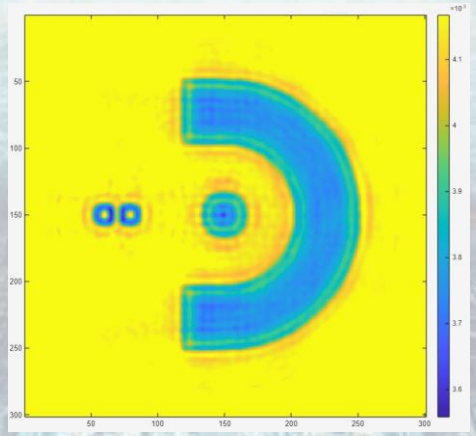






Модельный эксперимент 3. Фантом, градиент и восстановленное изображение для 27 частот и 4 источников





Модельный эксперимент 4. Фантом и восстановленное изображение для 27 частот и 12 источников

Особенности параллельной реализации алгоритма решения обратной задачи

В представленных вычислительных экспериментах использовалась конечно-разностная сетка размером до 800 × 800 точек, до 27 частот и до 12 источников для каждой задачи.

Для каждого источника и частоты вычисления проводились отдельным процессом MPI, максимальное количество использованных процессов MPI составляло порядка 500. В описанной выше схеме реализации параллельных вычислений одна итерация градиентного метода занимает ~60 секунд, количество итераций составляет ~100.

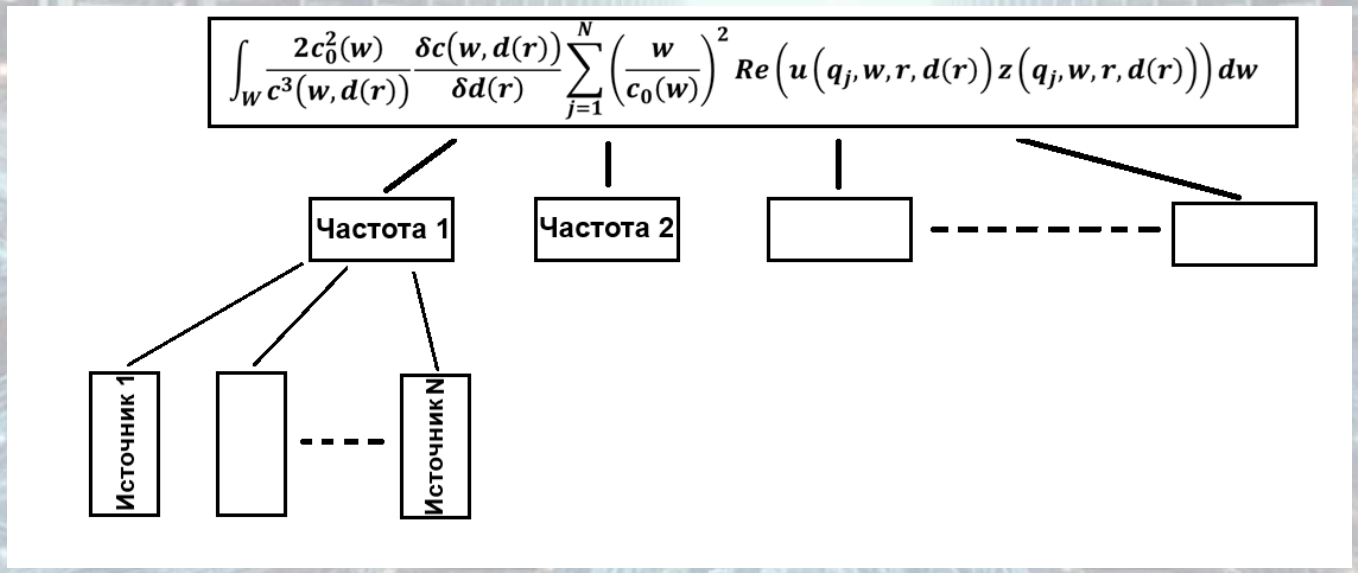


Схема параллелизации расчета градиента

Особенности решения прямой и сопряженной задачи

В дискретизированном приближении прямая и обратная задача для каждого положения источника и фиксированной частоты сводятся к составлению и решению разреженной СЛАУ. Размерность матрицы системы для типичной задачи составляет порядка 1e+6 и поэтому ее полное хранение невозможно. Из-за высокой разреженности матрица хранится в формате CSR. Для компиляции, хранения и решения СЛАУ были выбраны библиотека Eigen и прямой решатель SparseLU. Перед решением также использовались функции Eigen для переупорядочивания матриц.

Уравнение Гельмгольца дискретизируется на однородной прямоугольной сетке, соответствующие производные аппроксимируются конечными разностями с использованием стандартных формул. Дискретизированное уравнение Гельмгольца имеет вид

$$\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{\Delta y^2} + \frac{\omega}{c^2(\omega, d(r_{ij}))} u_{ij} = F_{i,j}$$

Индексы *i, j* проходят через все значения внутри вычислительной области

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00089). Исследование проводится в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.
Исследование проводится с использованием оборудования совместного исследовательского центра высокопроизводительных вычислительных ресурсов Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Спасибо за внимание!