



**ПОЛИТЕХ**  
Санкт-Петербургский  
политехнический университет  
Петра Великого

# Decomposition Strategies for the Contact Problem in Fuselage Assembly Process Modeling

---

Надежда Зайцева, Юлия Шиндер, Сергей Лупуляк,  
Валерия Хашба, Мария Титова, Станислав Бакланов

НИЛ Виртуально-имитационного моделирования

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

# Сборка крупногабаритных конструкций

Моделирование процессов сборки в авиастроении:

- Жесткие стандарты качества и необходимость точного моделирования контактных задач
- Гибкость и деформируемость конструкций
- Присутствие случайных сборочных отклонений
- Необходимость оптимизации процессов сборки

Стандартные программные продукты не позволяют проанализировать процесс сборки с нужной точностью и за разумное время



Сборка корпуса, boeng.com



Сборка фюзеляжа, airbus.com

# Программный комплекс ASRP

## ASRP (Assembly Simulation of Riveting Process)

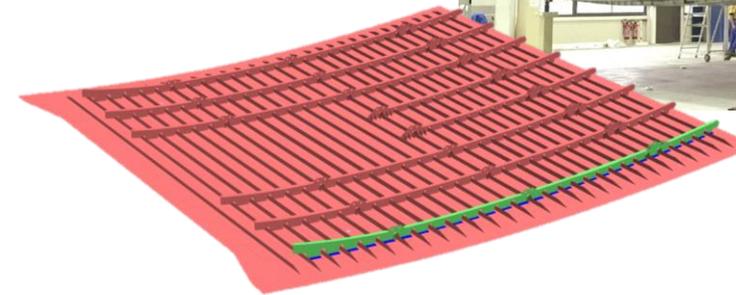
специализированный комплекс для моделирования и оптимизации процесса сборки крупногабаритных конструкций

- Определение перемещений и напряжений
- Учет контакта и деформаций
- Верификация сборочной процедуры
- Оптимизация сборочной процедуры

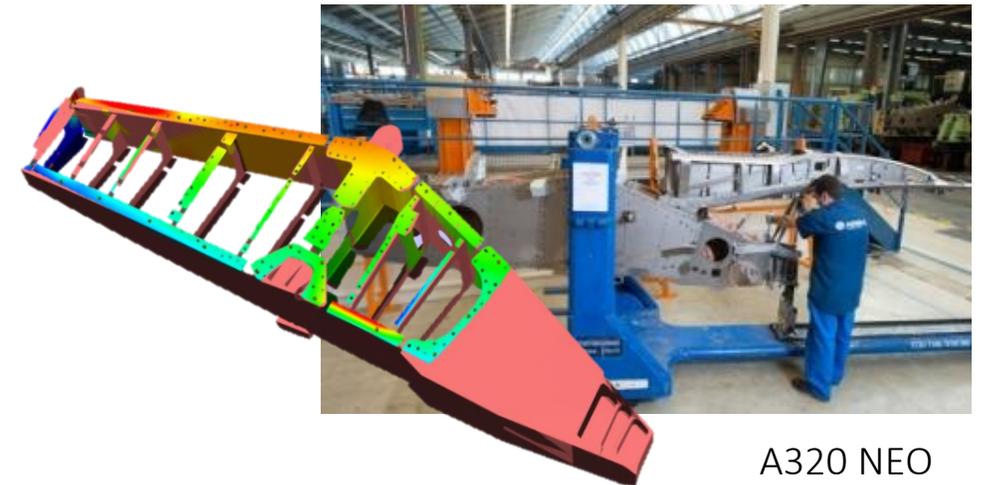
**Локальная эффективность** - высокая производительность при работе с небольшими зонами контакта (до 20 тыс. узлов).

**Проблемы масштабирования** - снижение эффективности при увеличении размера зоны контакта (рост времени вычислений и увеличение требований к вычислительным ресурсам)

**Задача:** внедрить декомпозицию расчетной области для ускорения вычисления



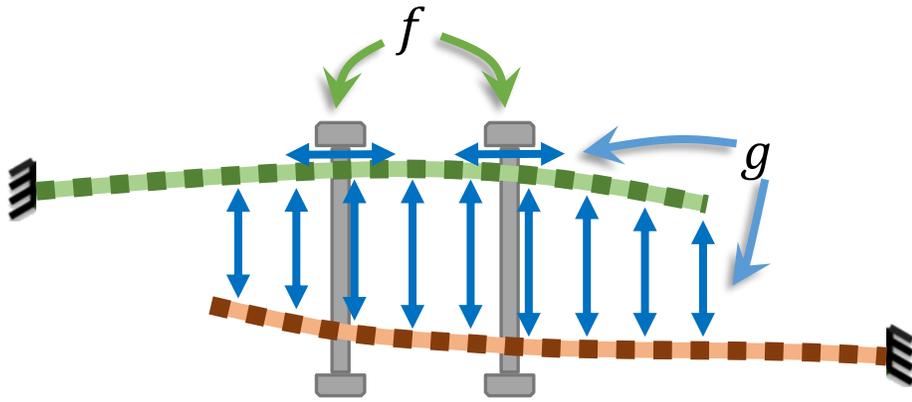
A350 CWB  
lower beam assembly



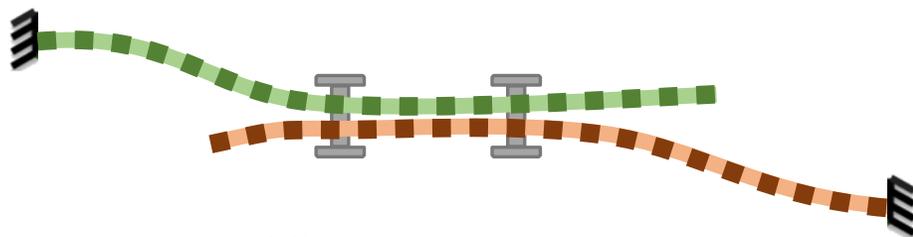
A320 NEO  
pylon assembly

# Численное решение контактной задачи

Схематичное изображение соединения:



(а) до контакта



(б) после контакта

Прямая постановка контактной задачи [1]:

$$\min_{A^T u - g \leq 0} \left( \frac{1}{2} u^T K u - f^T u \right)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  – вектор нормальных и касательных перемещений в зоне возможного контакта (зоне стыка)

$n = 1\,000 \div 20\,000$  – число расчетных узлов

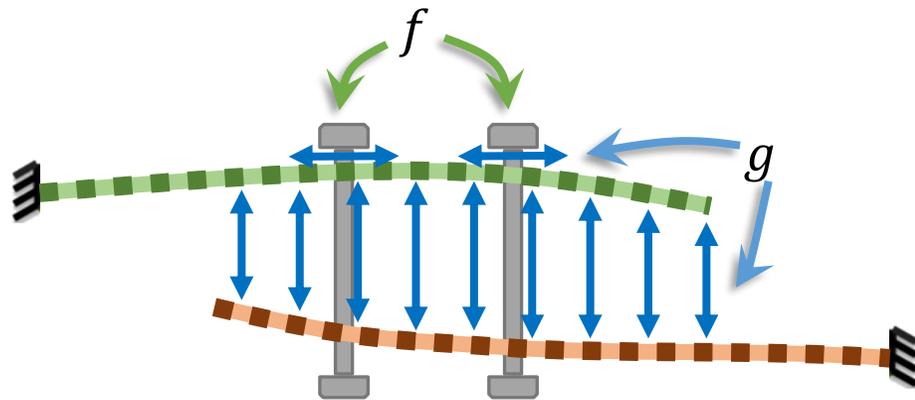
$K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – редуцированная матрица жесткости

$f \in \mathbb{R}^n$  – вектор внешних сил

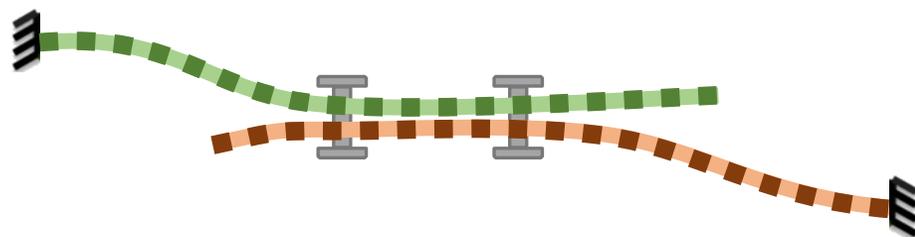
$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – матрица ограничений

$g \in \mathbb{R}^m$  – вектор ограничений (нормальный зазор между деталями и касательный зазор в отверстиях)

# Численное решение контактной задачи



(a) до контакта



(б) после контакта

Прямая постановка контактной задачи:

$$\min_{A^T x - g \leq 0} \left( \frac{1}{2} x^T K x - f^T x \right)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  – вектор нормальных и касательных перемещений в зоне возможного контакта (зоне стыка)  
 $n = 1\,000 \div 20\,000$  – число расчетных узлов

Двойственная постановка [2]: Относительная постановка [2]:

$$\max_{\lambda \geq 0} \left( -\frac{1}{2} \lambda^T Q \lambda - p^T \lambda + s \right)$$

$\lambda \in \mathbb{R}^{n/2}$  – вектор коэффициентов Лагранжа

$$\min_{u - g \leq 0} \left( \frac{1}{2} x^T \tilde{K} u - \tilde{f}^T x \right)$$

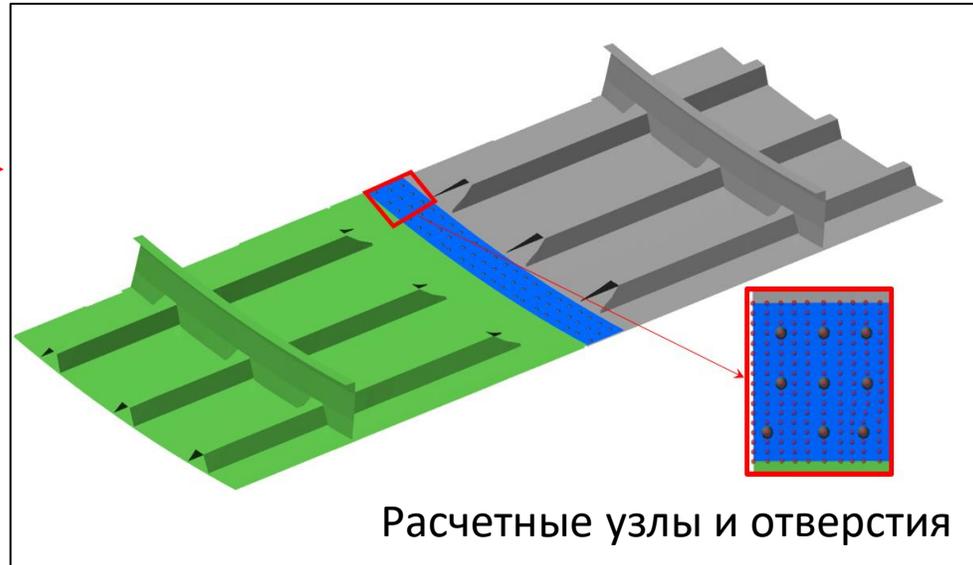
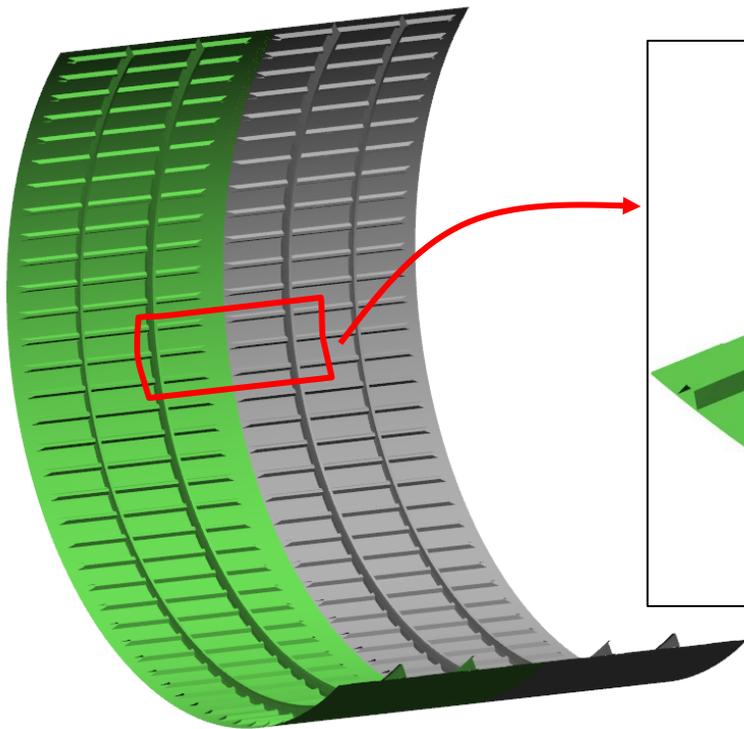
$u \in \mathbb{R}^{n/2}$  – вектор относительных перемещений

Проекционный метод Ньютона (Newton Projection Method) [3] реализован в ASRP для решения QP задач.

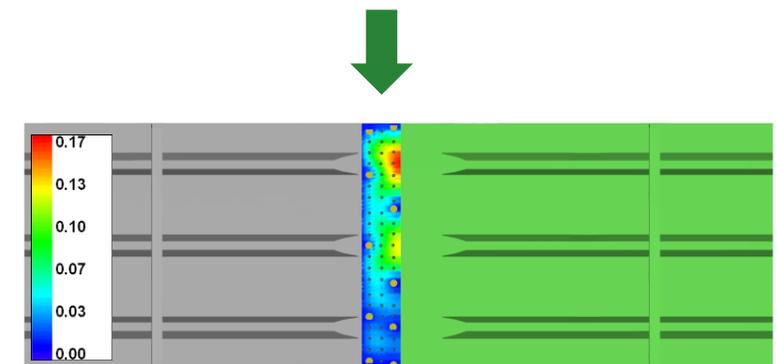
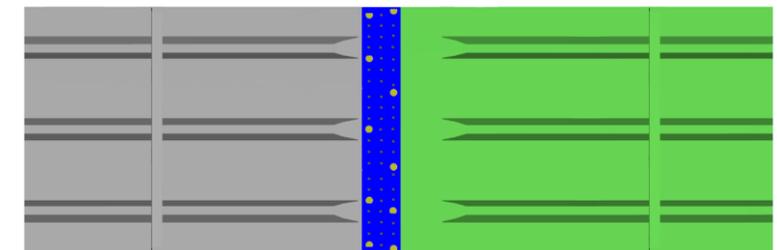
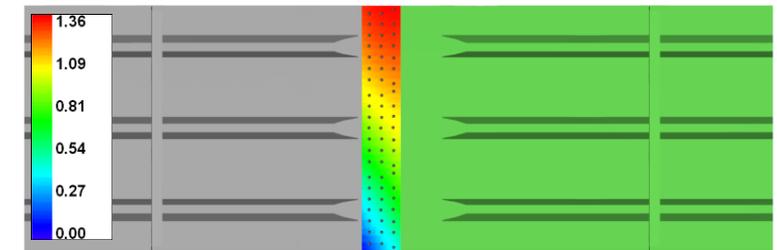
2. Stefanova, M., Minevich, O., Baklanov, S.: Convex optimization techniques in compliant assembly simulation. Optim. Eng. (2020)

3. Baklanov, S., Stefanova, M., Lupuleac, S.: Newton projection method as applied to assembly simulation. Optimization Methods and Software pp. 1–28 (2020)

# Численное решение контактной задачи



Тестовая модель  
(2 300 расчетных узлов)

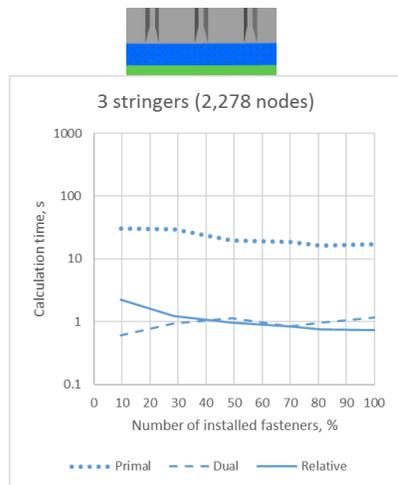


# Численное решение контактной задачи

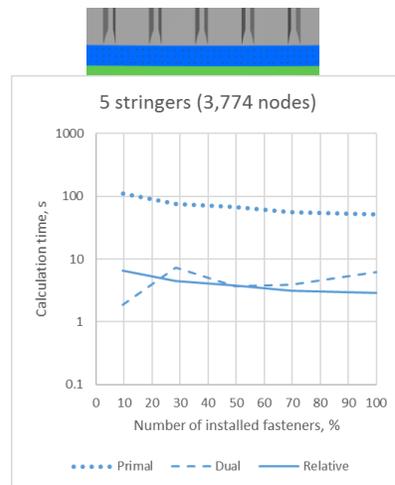
С увеличением **размерности задачи**:

- Растет время расчёта контактной задачи
- Растет количество используемой памяти

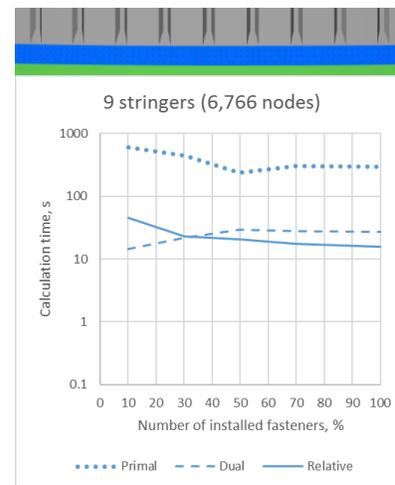
Время расчёта для задач разных размерностей:



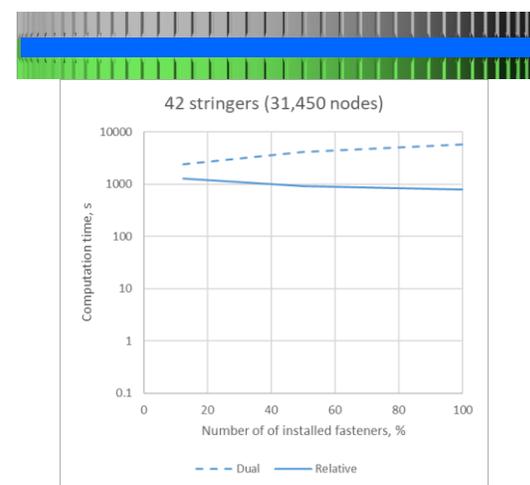
≈ 2 000 узлов



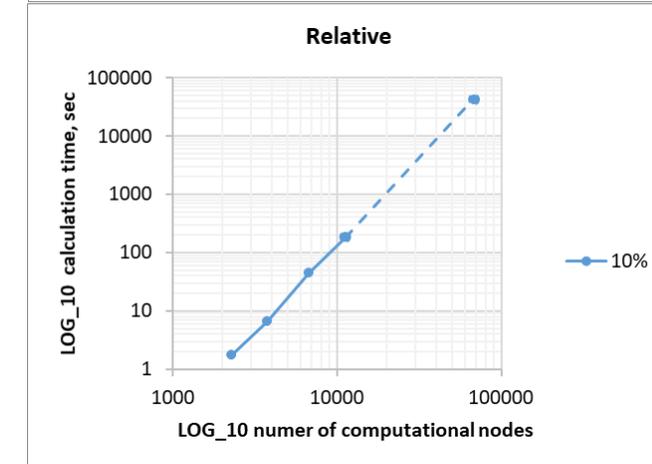
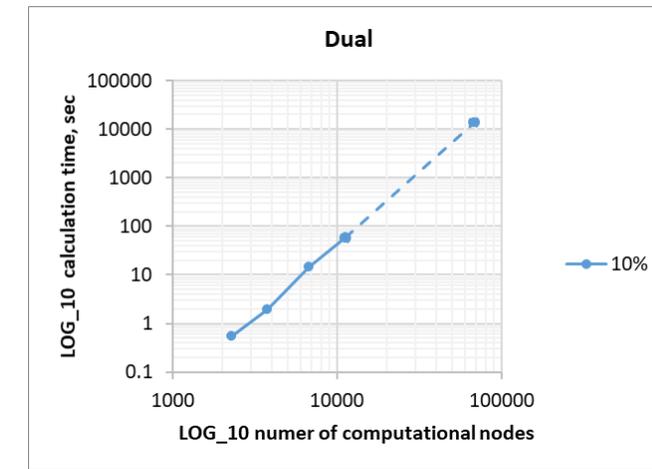
≈ 4 000 узлов



≈ 9 000 узлов



≈ 30 000 узлов  
половина фюзеляжа



Оценка времени расчета  
для всего фюзеляжа  
(≈ 60 000 узлов)

# Метод декомпозиции контактной задачи

## Domain decomposition method (DDM) с модификацией Эйткена [4]

Разбиваем зону стыка на  $r$  непересекающихся **подзон**, для каждой подзоны последовательно решаем QP задачу:

$$x_j^{k+1} = \arg \min_{x_j} \frac{1}{2} x_j^T K_{jj} x_j - f_j^{kT} x_j$$

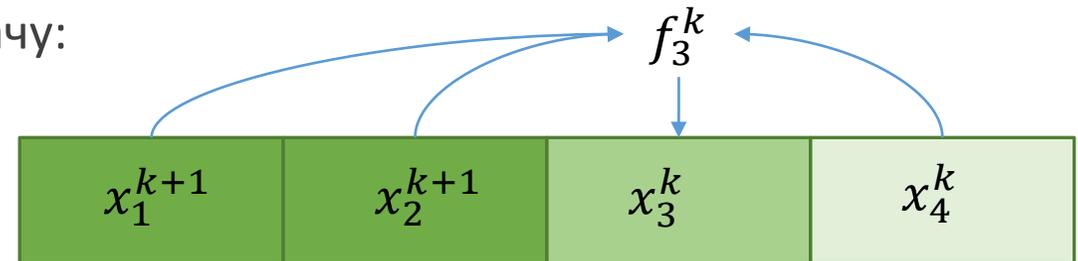
$$s. t. A_j x_j \leq g_j, j \in [1, r]$$

Корректирующие силы, учитывающие взаимодействие между подзадачами:

$$f_j^k = f_j - \sum_{l=1, l \neq j}^r K_{jl} x_l^k$$

$K_{jl}$  - блочная матрица, учитывающая влияние подобласти  $l$  на подобласть  $j$

Метод Зейделя



$K_{11}$		$K_{13}$	
	$K_{22}$	$K_{23}$	
$K_{13}^T$	$K_{23}^T$	$K_{33}$	$K_{34}$
		$K_{34}^T$	$K_{44}$

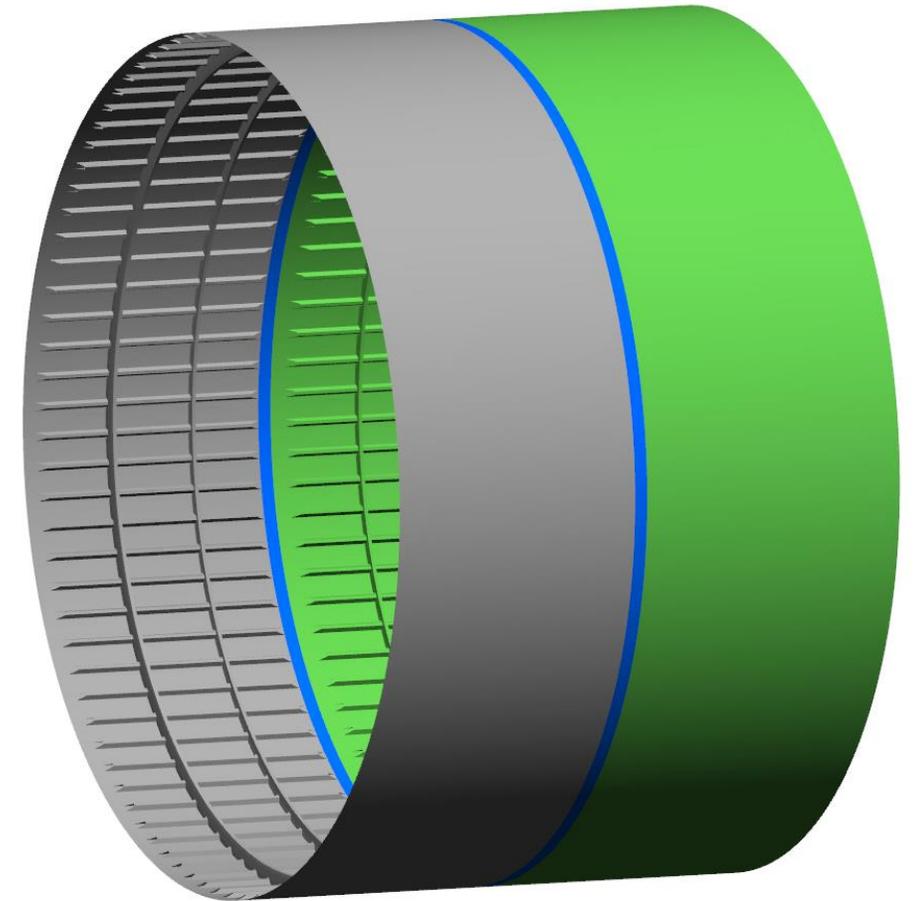
4. Baklanov, S., Stefanova, M., Lupuleac, S., Shinder, J., Eliseev, A.: Decomposition method for solving the quadratic programming problem in the aircraft assembly modeling. Optimization and Applications. pp. 3–17 (2022)

# Анализ сборки фюзеляжа

- Диаметр фюзеляжа 6 метров
- Зона стыка содержит 68 000 узлов
- Начальный зазор 0.6 мм
- Касательные ограничения в местах установки крепёжных элементов (2 000 отверстий)



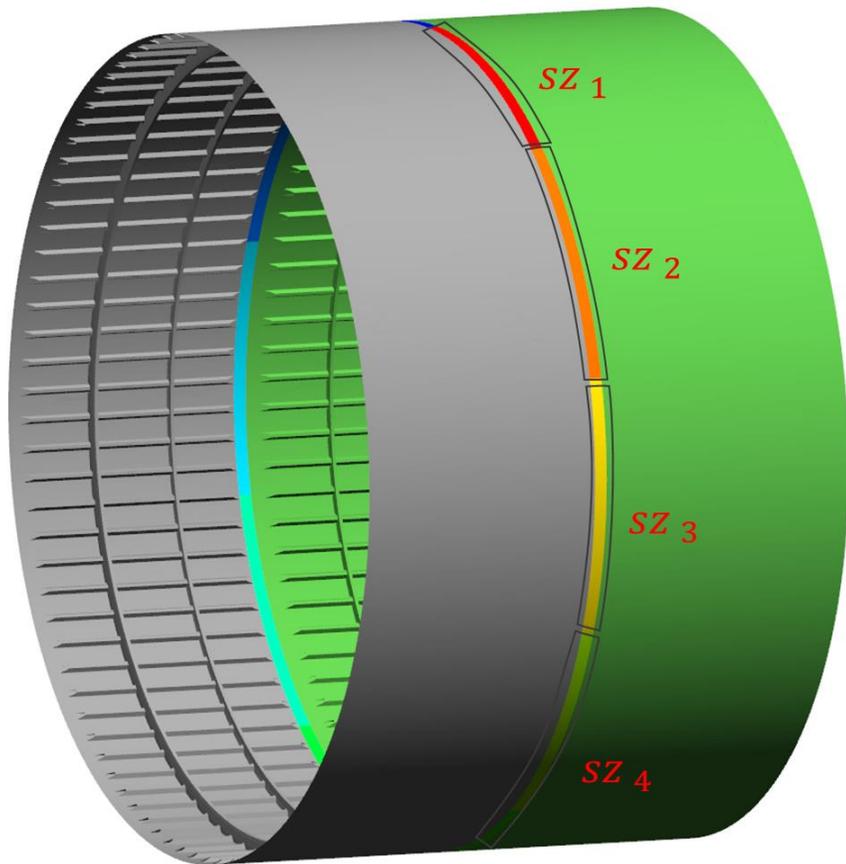
Фюзеляж Airbus A350



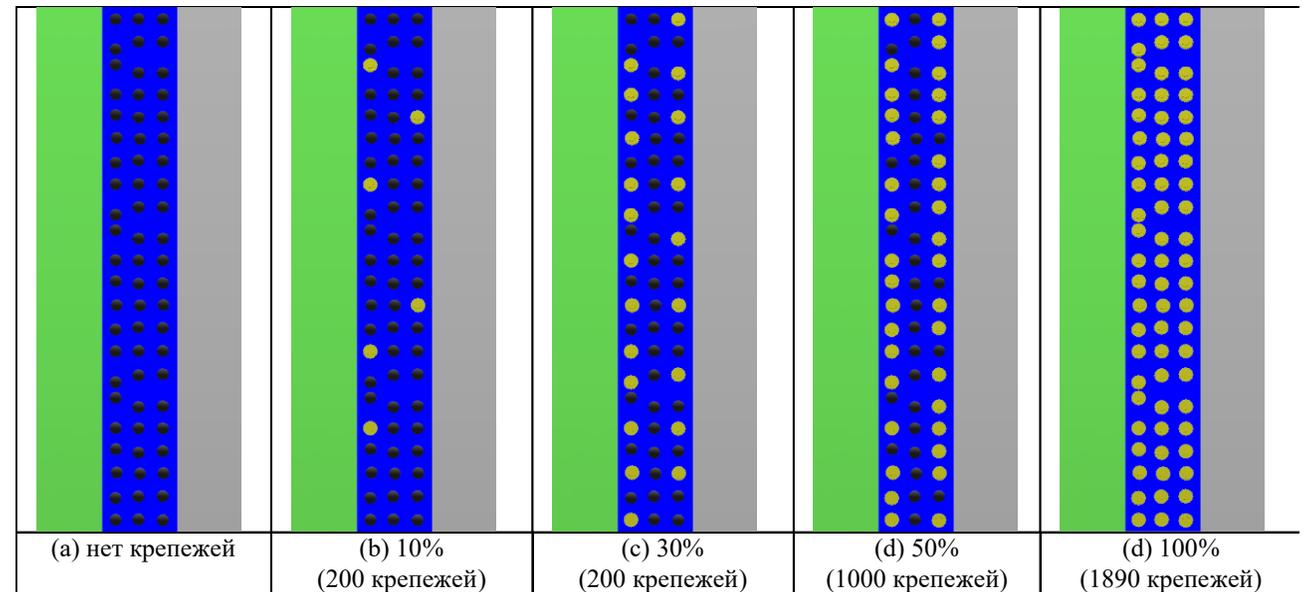
Расчетная модель – две секции фюзеляжа

# Анализ сборки фюзеляжа с декомпозицией

Пример разбиения на подзоны:



Расстановки крепёжных элементов (всего 2 000 отверстий):



# Требуемые ресурсы

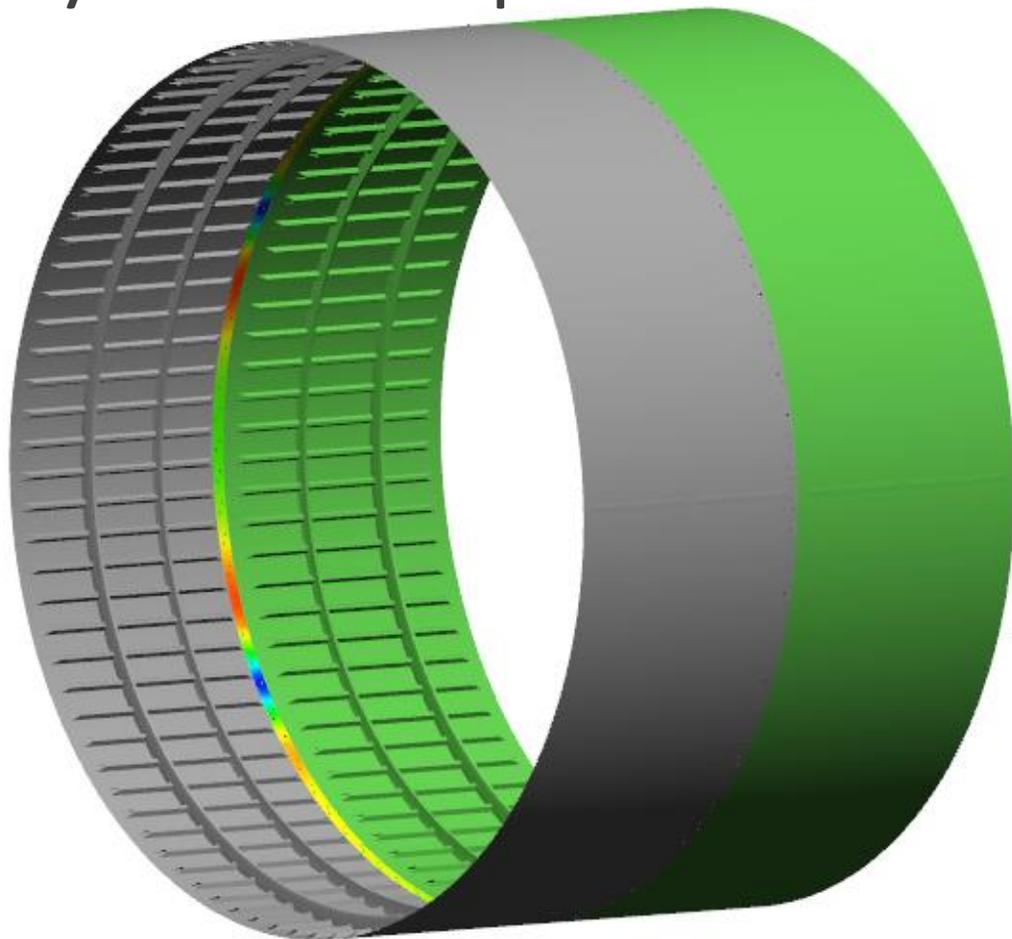
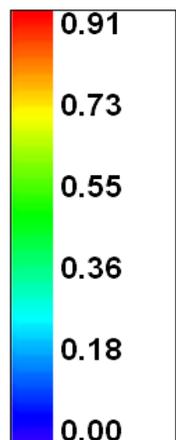
Технические характеристики используемого ПК:

- Процессор: Intel Core i5-12400F
- ОЗУ: 64 GB
- ОС: Windows 10 Pro
- ASRP software

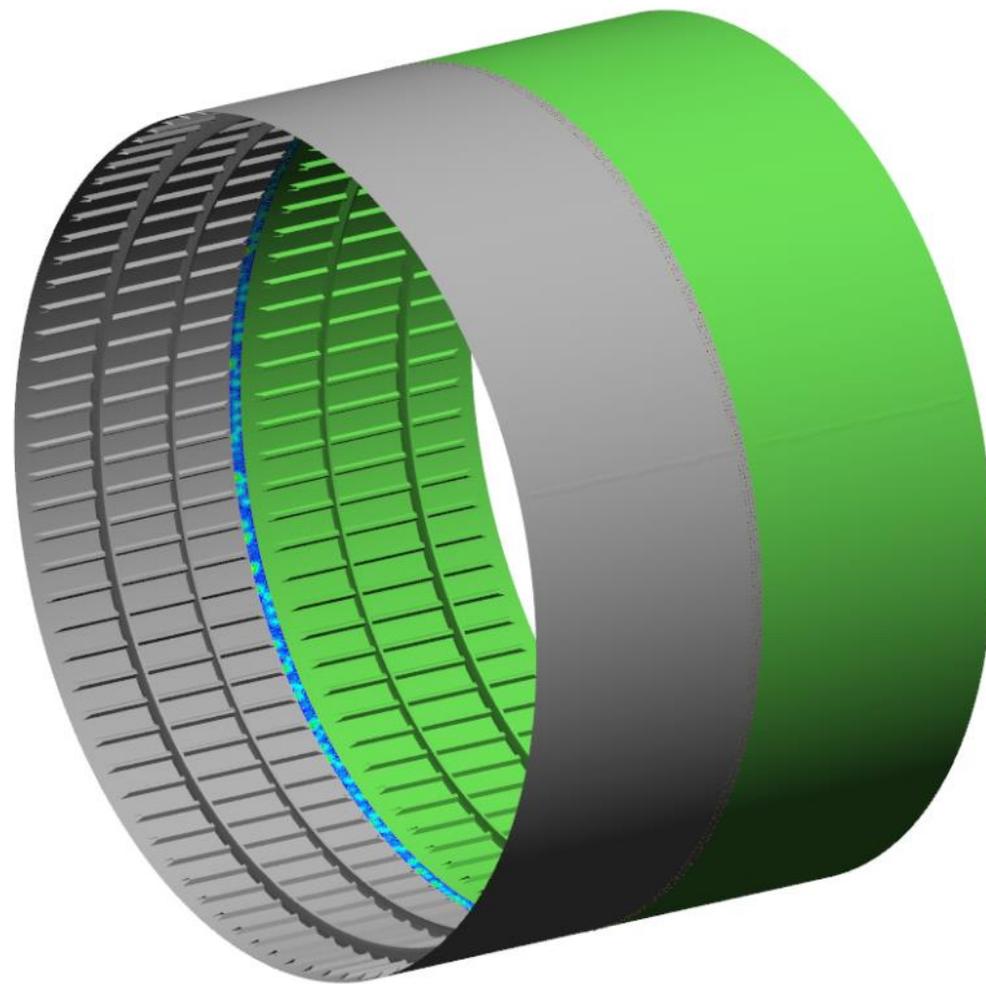
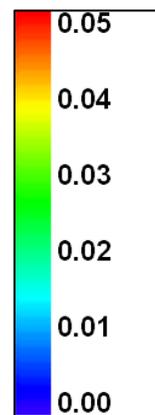
Память, необходимая для хранения матриц и решения контактных задач:

Количество подзон	Количество узлов в подзоне	Память, Гб
1	68 000	<b>103.35</b>
6	11 332	<b>31.58</b>
10	6 800	<b>25.84</b>
18	3 776	<b>22.01</b>
30	2 265	<b>20.09</b>

# Результаты расчёта



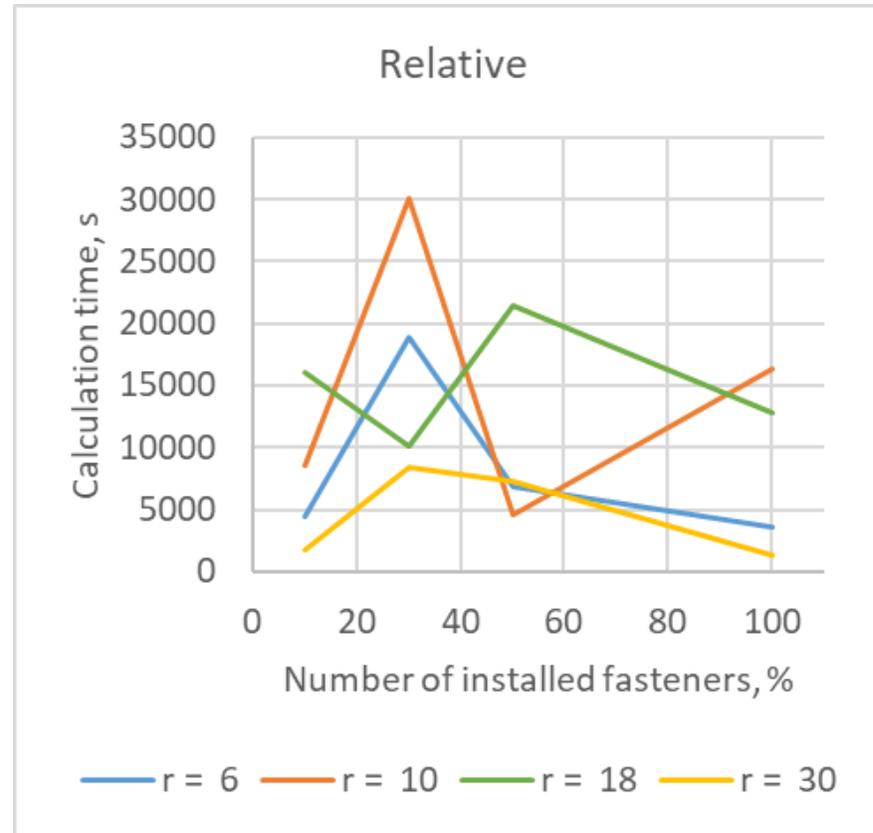
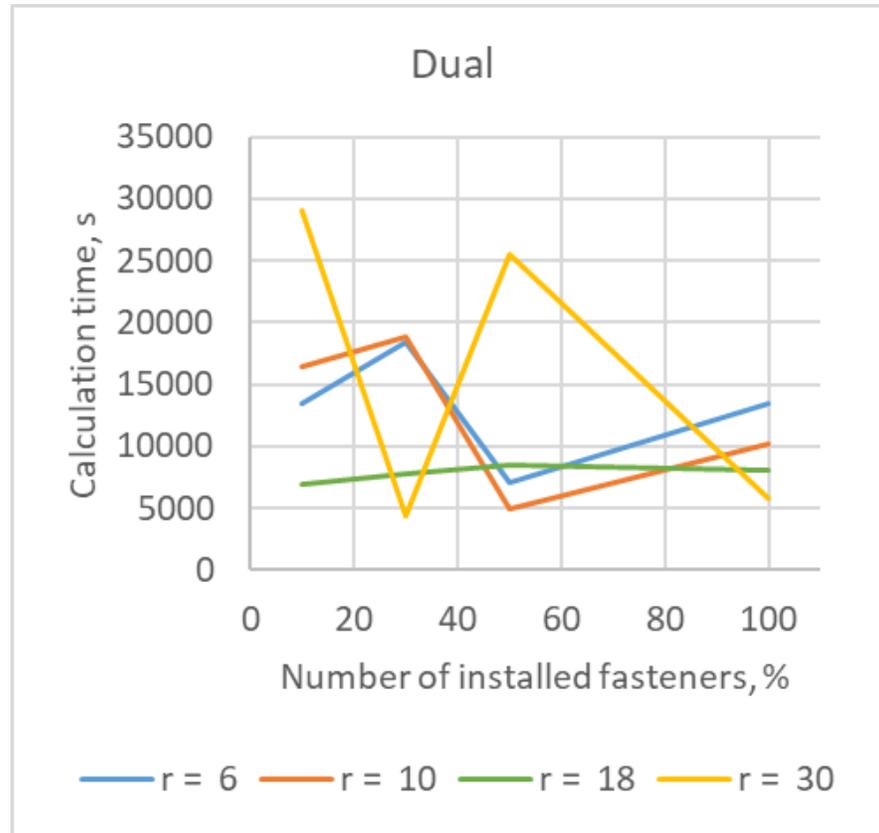
Зазор между деталями  
после установки 30% крепежей



Зазор между деталями  
после установки 100% крепежей

# Время расчёта

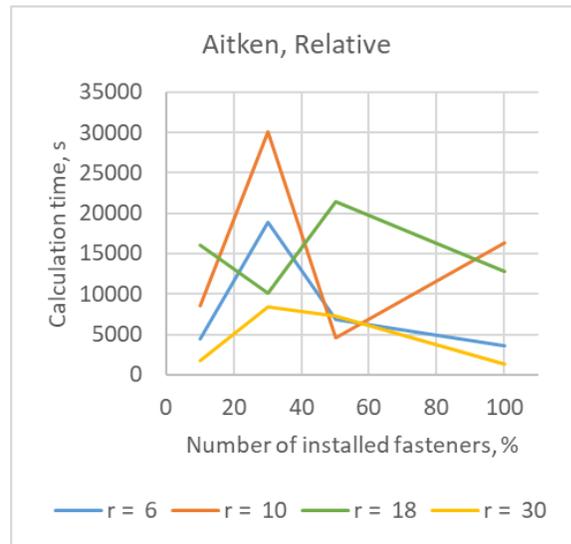
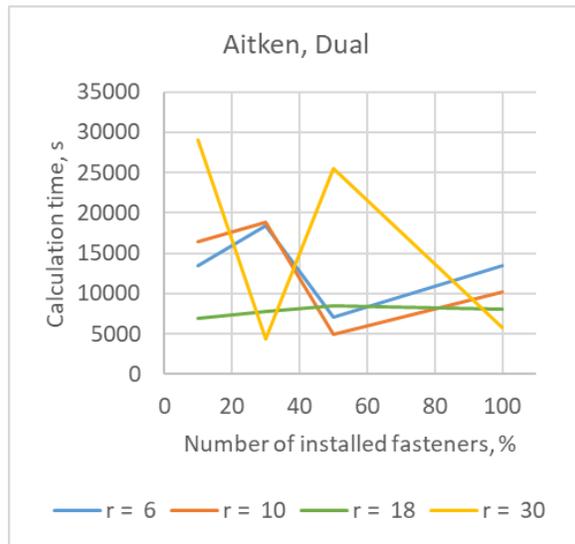
С использованием декомпозиции (метод Эйткена):



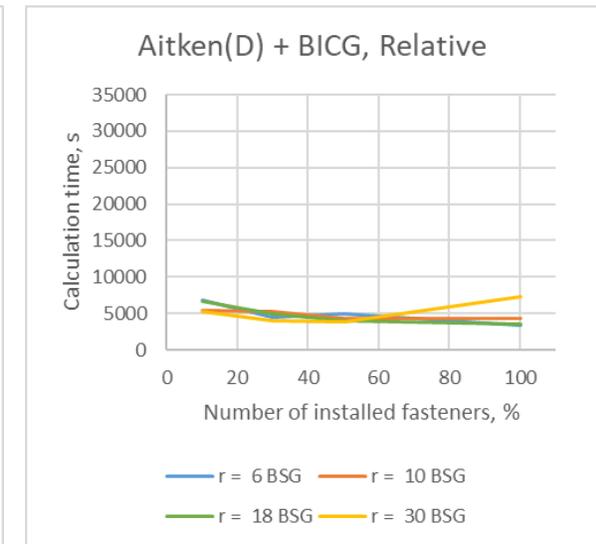
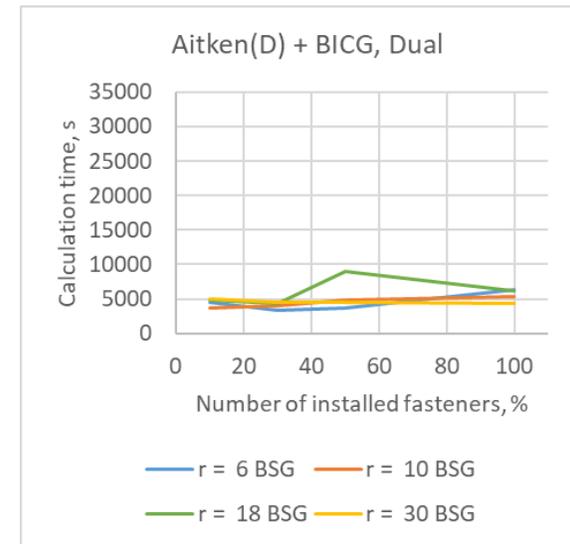
Время расчёта для контактных задач для разного количества подобластей ( $r$ )

# Время расчёта

С использованием декомпозиции  
(метод Эйткена):



С добавлением метода бисопряженных градиентов  
(BiCGStab method) [5]:

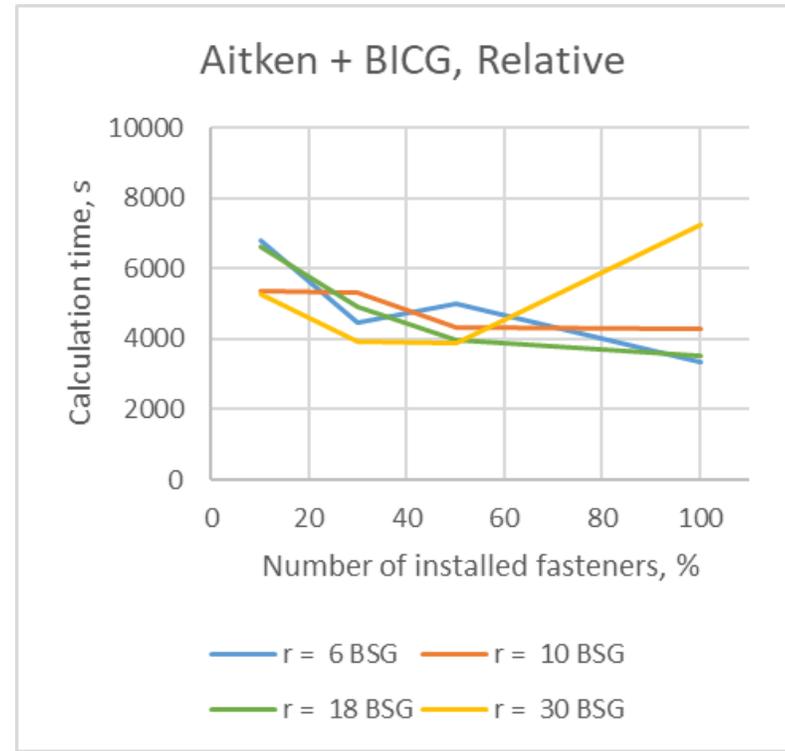
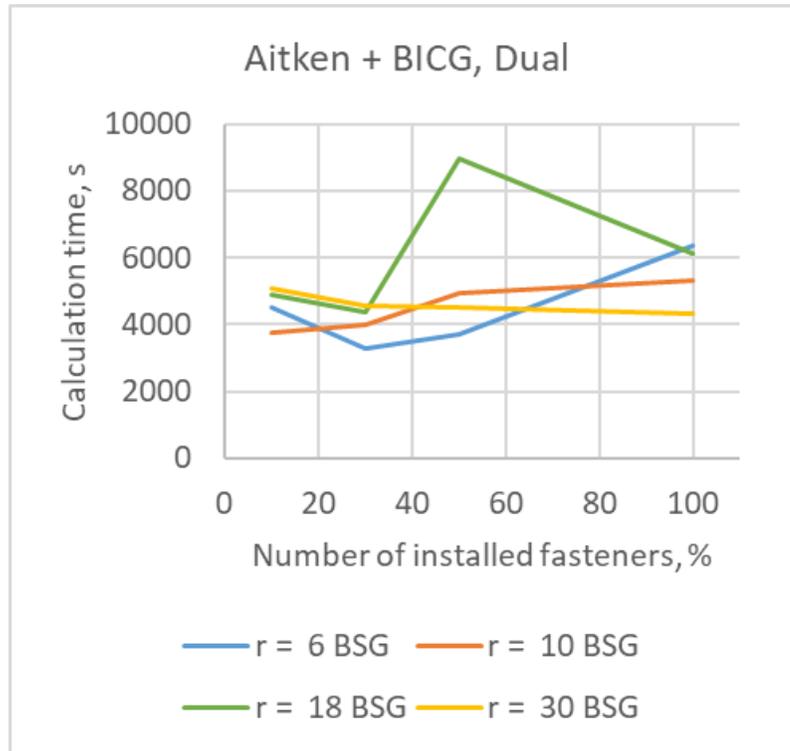


Время расчёта для контактных задач для разного количества подобластей ( $r$ )

5. Baklanov, S., Titiva, M., Zaitseva, N., Shinder, J. and Lupuleac, S. Enhancement of the domain decomposition method for quadratic program in application to aircraft assembly modeling. Communications in Computer and Information Science (in print) (2024)

# Время расчёта

С добавлением метода бисопряженных градиентов (BiCGStab method) [5]:



Время расчёта для контактных задач для разного количества подобластей ( $r$ )

5. Baklanov, S., Titiva, M., Zaitseva, N., Shinder, J. and Lupuleac, S. Enhancement of the domain decomposition method for quadratic program in application to aircraft assembly modeling. Communications in Computer and Information Science (in print) (2024)

# Заключение

## Основные результаты:

- Существенное сокращение количества требуемых ресурсов и времени расчёта
- Улучшение точности моделирования процессов сборки крупногабаритных конструкций
- Открылась возможность оптимизации процессов сборки

## Перспективы развития:

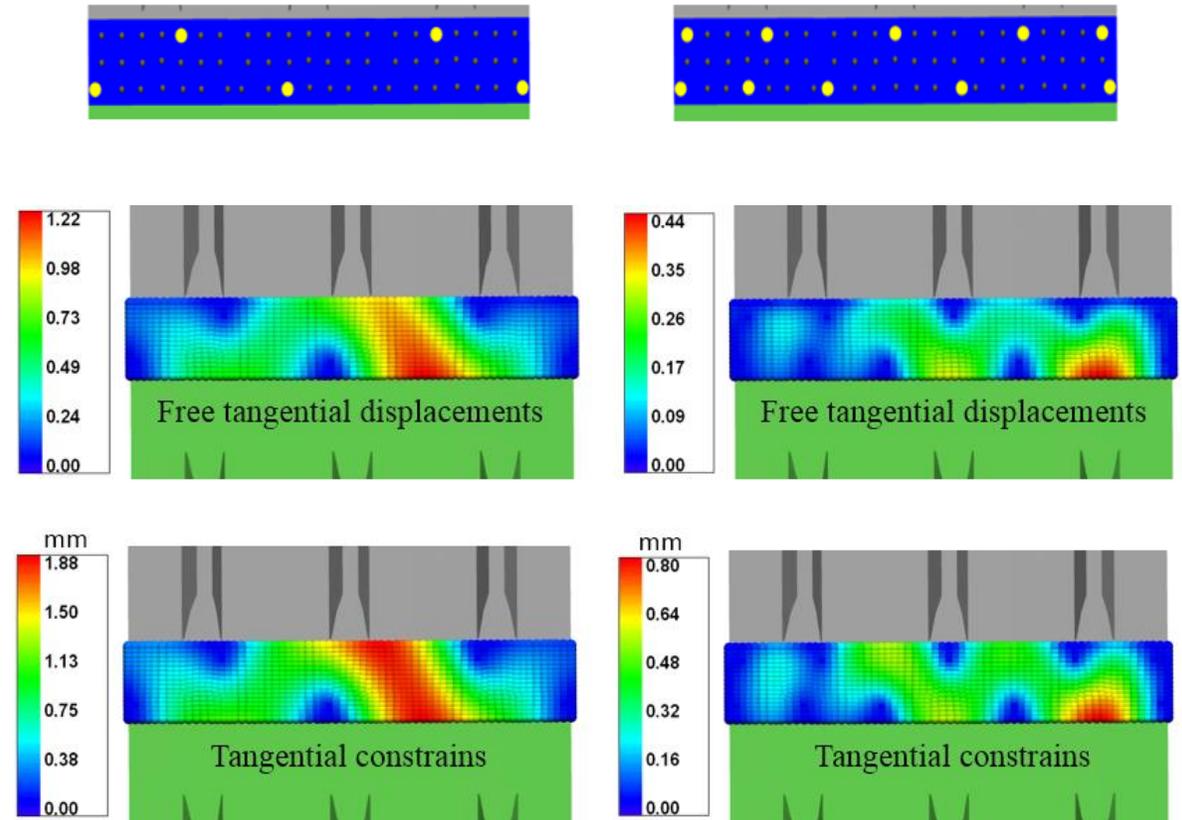
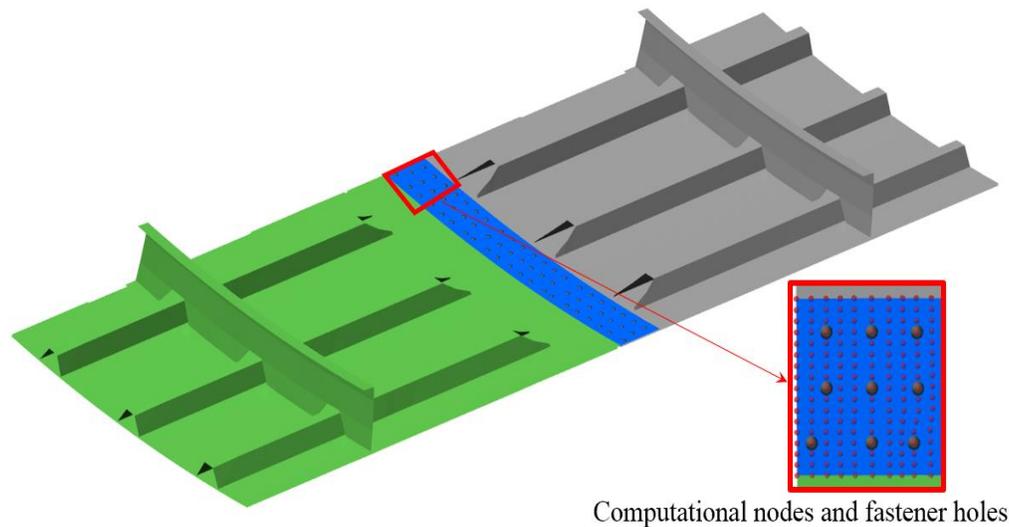
- Дальнейшее развитие алгоритмов декомпозиции
- Внедрение распараллеливания по задачам для оптимизации процесса серийной сборки

Спасибо за внимание!

# Численное решение контактной задачи

Методы решения задачи квадратичного программирования (QP):

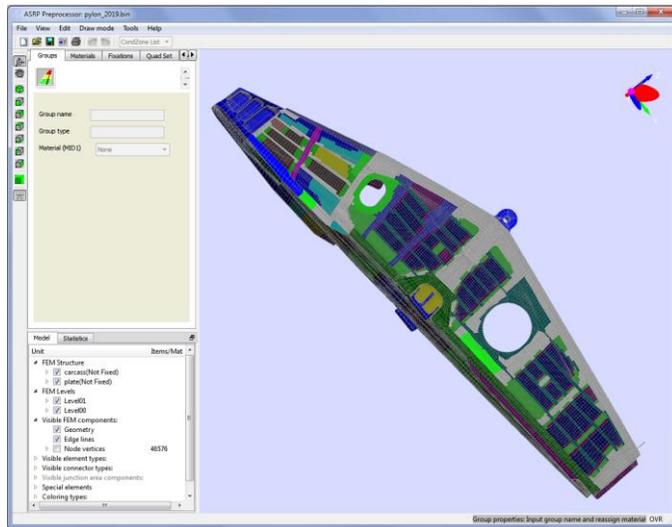
- Active Set Method (ASM)
- Interior point method (IPM)
- **Newton Projection Method (NPM) [3]**



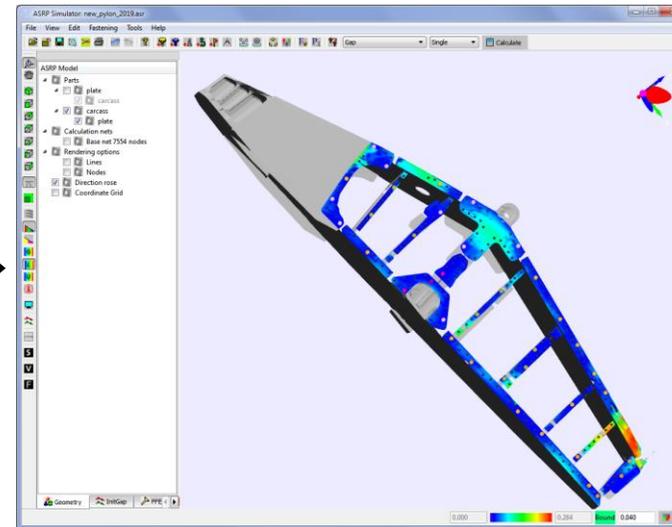
# Программный комплекс ASRP



ASRP Pre/Postprocessor



ASRP Simulator



Многопроцессорная версия ASRP Simulator



MSC  
Nastran

Dassault  
Abaqus

Создание моделей для Simulator на основе конечно-элементных моделей соединений. Вычисление напряжений, вызванных процессом клепки

Вычисление перемещений частей, зазоров между деталями, верификация и оптимизация расположения крепежных элементов, вычисление нагрузки в элементах крепления и др.

Закрепления,  
Позиции отверстий

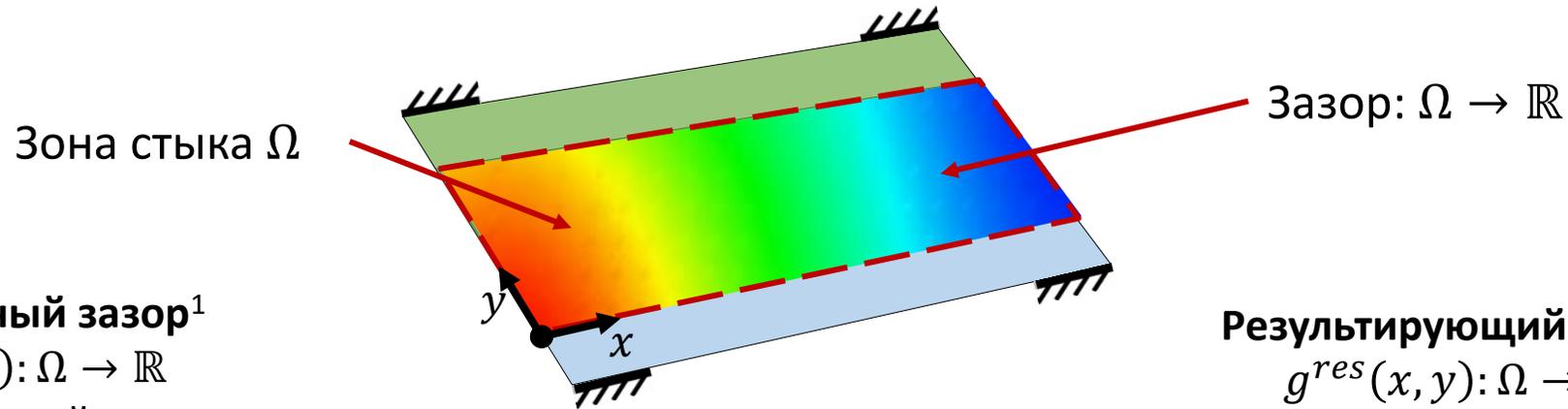
Конечно-элементная  
модель

Измерения поверхностей  
и начальных зазоров

Анализ допусков и  
посадок

# Учет сборочных отклонений

**Зазор** между деталями – расстояние между точками поверхностей деталей в нормальном направлении к зоне возможного контакта (зоне стыка)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с локальной системой координат:

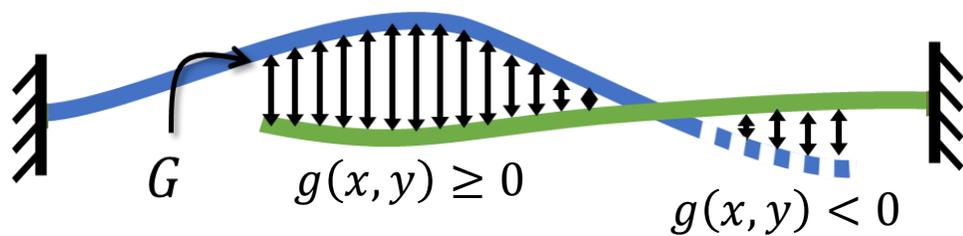


**Начальный зазор<sup>1</sup>**

$$g(x, y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

«виртуальный» зазор

без учета контактного взаимодействия



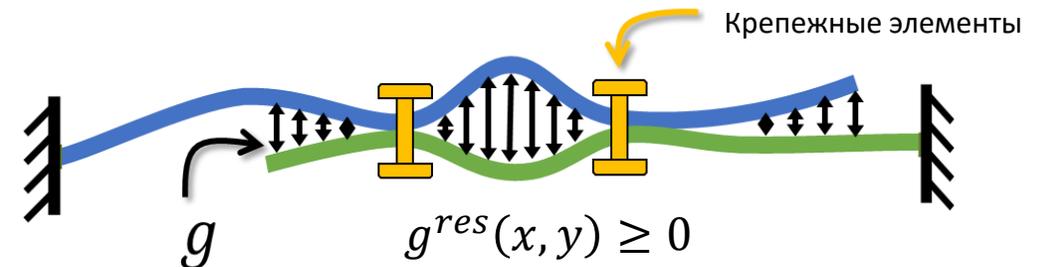
- Определяется независимыми отклонениями деталей
- Модуль определяет расстояние, а знак – расположение деталей без учета их взаимодействия

**Результирующий зазор**

$$g^{res}(x, y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

реальный зазор

с учетом контактного взаимодействия



- Вычисляется из решения контактной задачи<sup>2</sup>
- Характеризует качество сборки
- Имеет случайный характер

[1] Yastrebov, V. Computational contact mechanics: geometry, detection and numerical techniques, 2011.

[2] Petukhova, M. et al. Numerical approach for airframe assembly simulation, 2014.

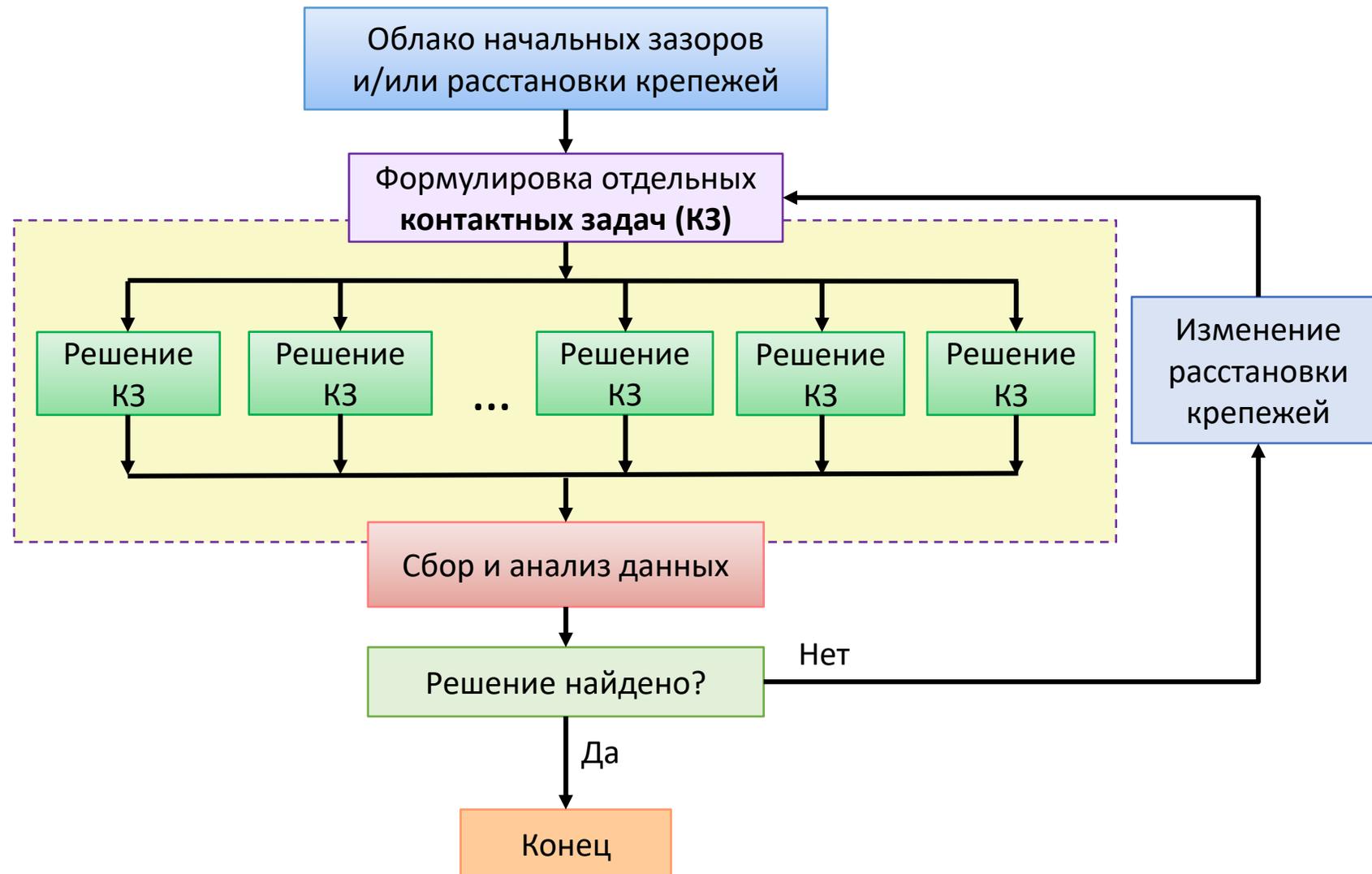
# Параллельные вычисления



Суперкомпьютерный центр  
«Политехник RSC PetaStream»

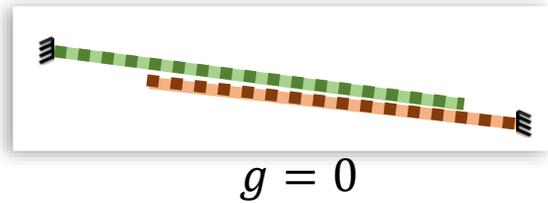
Tornado:

- nodes: 612
- cpu: 2 x Intel Xeon CPU E5-2697 v3 @ 2.60GHz
- cores/hwthreads: 28 / 28
- mem: 64G
- net: 56Gbps FDR Infiniband



# Моделирование сборочных отклонений

Идеальный случай:



Случайные сборочные отклонения:

- Производственный процесс (неточности изготовления и обработки)
- Сборочный процесс (неточности закрепления и установки крепежей)

Случайные начальные зазоры

