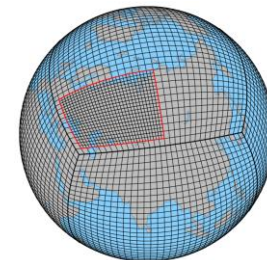


Геометрический многосеточный метод для  
неразнесенных аппроксимаций уравнений динамики  
атмосферы на сетке кубическая сфера

Г.С. Гойман, В.В. Шашкин  
ИВМ РАН, Гидрометцентр России, МФТИ

Москва, 29.09.2025



# План презентации

- Мотивация
- Явно-неявные аппроксимации по времени, разнесение переменных
- Анализ модельных уравнений, описание метода
- Численные эксперименты
  - Сходимость
  - Масштабируемость

# Мотивация

Модель атмосферы нового поколения ИВМ РАН-Гидрометцентра

**Задумка:** универсальный динамический блок для задач прогноза погоды, моделирования климата и др.

- Сетка кубическая сфера
- Не один численный метод, а коллекция разных
- Разные системы уравнений (гидростатическая, негидростатическая)
- Методы локального повышения разрешения

## Масштабируемость и вычислительная эффективность

- Расчеты с пространственным разрешением вплоть до 1 км ( $10^{10}$  степеней свободы)
- Оперативные рамки < 20 мин на 1 сутки прогноза

# Неявные методы интегрирования по времени

Гидротермодинамика атмосферы

- **Жесткая система** характерные временные масштабы от секунд до месяцев
- Сильные ограничения на шаг по времени **явных** методов

**Явно-неявные (IMEX)** методы:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi = A_{\text{ex}}\psi + A_{\text{im}}\psi$$

- Позволяет использовать бóльшие шаги интегрирования по времени
- Требуется решения **эллиптического уравнения Гельмгольца** на каждом шаге
- **Масштабируемый и вычислительно эффективный** метод решения линейных систем уравнений

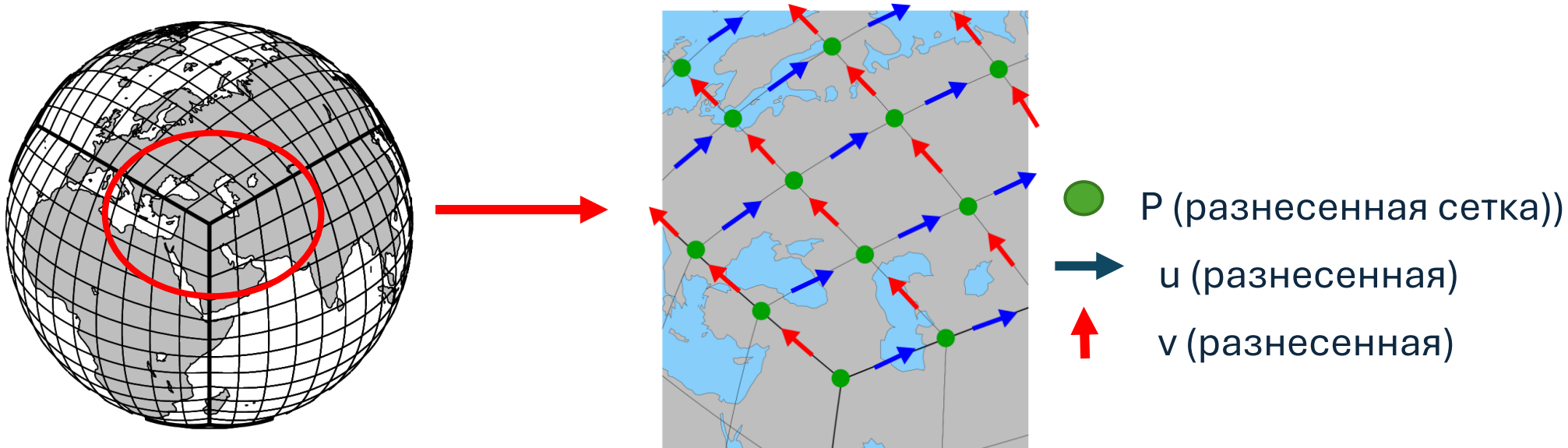
# Алгоритмы решения СЛАУ

- Параллельная масштабируемость и вычислительная эффективность
- Безматричность (matrix-free)
- Универсальность к выбору пространственной аппроксимации
- Возможные кандидаты:
  - Методы простой итерации (метод Рундсона, итерации Чебышева, ...)
  - Крыловские методы (CG, BiCGstab, GMRES, ...)
  - Геометрический многосеточный метод**

# Пространственная аппроксимация. Выбор разнесения переменных

Разнесение типа «С» по Аракаве

- + Оптимальные дисперсионные соотношения для инерционных волн
- + Отсутствие нефизичных стационарных мод
- Более дорогая и сложная реализация в случае неортогональной криволинейной системы координат



# Анализ модельного уравнения

- 1D линейные уравнения мелкой воды на периодическом отрезке

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + c_{adv} \frac{\partial u}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + c_{adv} \frac{\partial h}{\partial x} &= -H \frac{\partial u}{\partial x}.\end{aligned}$$

Перенос со скоростью  $c_{adv}$ , распространение гравитационных волн с фазовой скоростью  $c_g = \sqrt{gH}$

- Предполагая  $c_{adv} \ll c_g$

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\Delta t} + c_{adv} \frac{\partial u^n}{\partial x} &= -\frac{g}{2} \left( \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial h^{n-1}}{\partial x} \right) \\ \frac{h^{n+1} - h^{n-1}}{2\Delta t} + c_{adv} \frac{\partial h^n}{\partial x} &= -\frac{H}{2} \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} \right)\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}&\text{Уравнение Гельмгольца} \\ &\left( I - gH\Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h^{n+1} = q\end{aligned}$$

- Пространственная аппроксимация на неразнесенной сетке

$$h_i - \frac{\Delta t^2 g H}{4\Delta x^2} (h_{i+2} - 2h_i + h_{i-2}) = q_i$$

# Анализ модельного уравнения 2

- Пространственная аппроксимация на неразнесенной сетке

$$h_i - \frac{\Delta t^2 g H}{4 \Delta x^2} (h_{i+2} - 2h_i + h_{i-2}) = q_i$$

- Спектр матрицы системы:

$$\lambda = 1 + \sigma^2 \sin^2 k \Delta x \equiv 1 + \sigma^2 \sin^2 \theta \quad \theta = k \Delta x \in [-\pi, \pi) \quad \sigma = c_{grav} \Delta t / \Delta x$$

- Итерации метода Якоби со взвешиванием

$$h_i^{(p+1)} = h_i^{(p)} + \frac{\omega}{1 + \sigma^2/2} \left( q_i - h_i^{(p)} + \frac{\sigma^2}{4} (h_{i+2}^{(p)} - 2h_i^{(p)} + h_{i-2}^{(p)}) \right)$$

- Скорость сглаживания  $\mu(\omega)$ :

$$\mu(\omega) = \max_{\theta \in [-\pi, \pi) \setminus [-\pi/2, \pi/2)} \left| 1 - \frac{\omega}{1 + \sigma^2/2} (1 + \sigma^2 \sin^2 \theta) \right| \Rightarrow \mu(\omega_{opt}) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 1$$

Неэффективный сглаживатель!

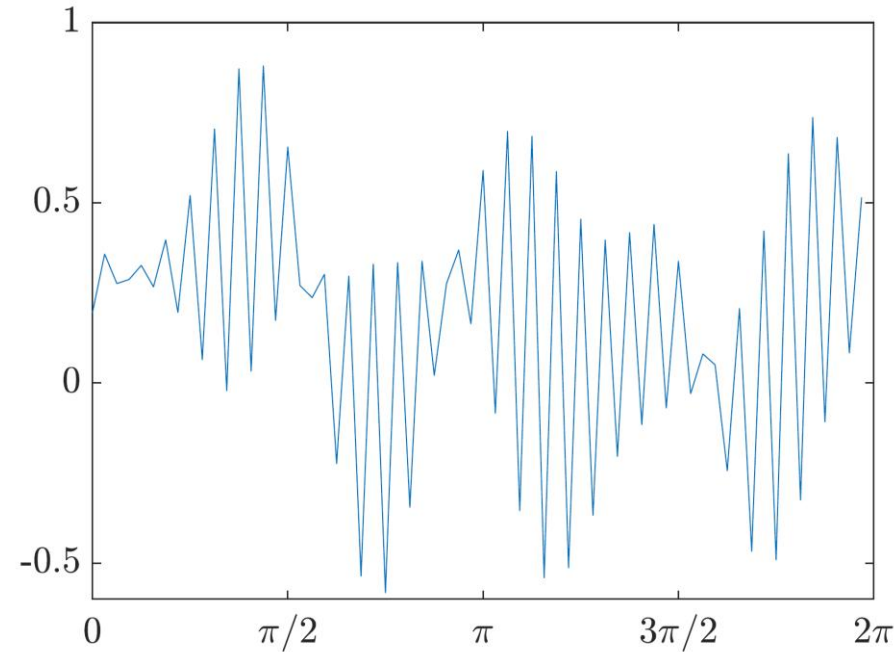
# Метод Якоби

- Пространственная аппроксимация на неразнесенной сетке

$$h_i - \frac{\Delta t^2 g H}{4 \Delta x^2} (h_{i+2} - 2h_i + h_{i-2}) = q_i$$

- Итерации метода Якоби со взвешиванием

$$h_i^{(p+1)} = h_i^{(p)} + \frac{\omega}{1 + \sigma^2/2} \left( q_i - h_i^{(p)} + \frac{\sigma^2}{4} (h_{i+2}^{(p)} - 2h_i^{(p)} + h_{i-2}^{(p)}) \right)$$



Ошибка после применения  
нескольких итераций сглаживания

# Анализ модельного уравнения 3

- Пространственная аппроксимация на неразнесенной сетке

$$h_i - \frac{\Delta t^2 g H}{4 \Delta x^2} (h_{i+2} - 2h_i + h_{i-2}) = q_i$$

- Перестановка неизвестных:

$$(h_1, h_2, \dots, h_N)^T \rightarrow (h_1, h_3, \dots, h_{N-1}, h_2, h_4, \dots, h_N)^T$$

- Блочнo-диагональный вид матрицы, спектр каждого блока:

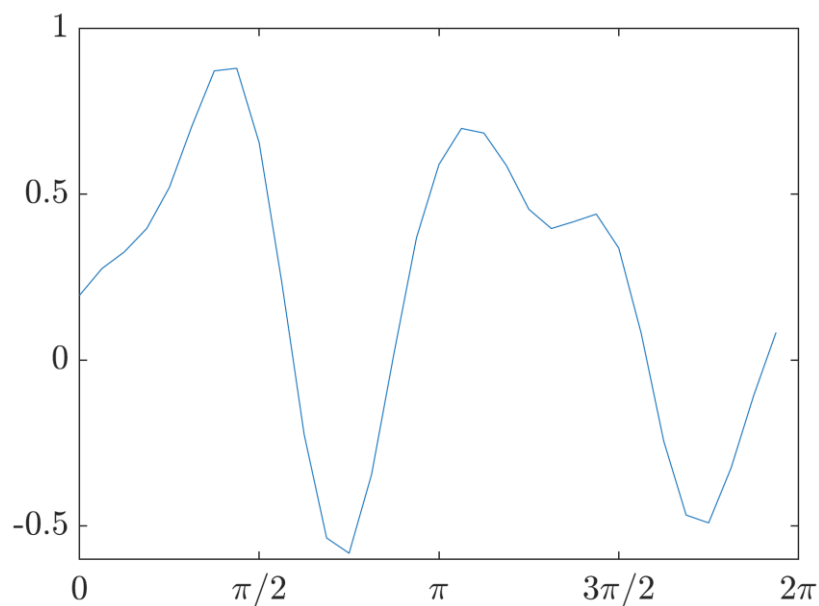
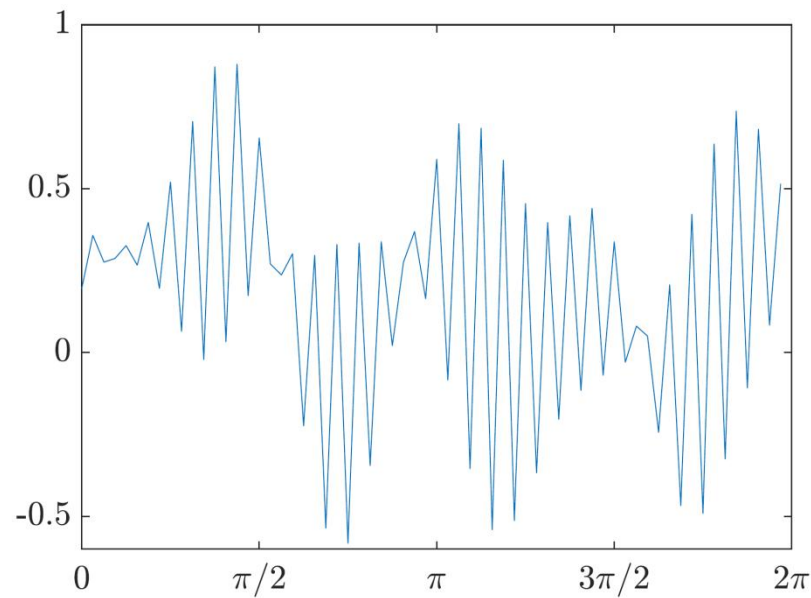
$$\tilde{\lambda} = 1 + \sigma^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \theta = k \Delta x \in [-\pi, \pi) \quad \sigma = c_{grav} \Delta t / \Delta x$$

- Скорость сглаживания при оптимизации для  $\tilde{\lambda}$

$$\mu(\omega_{opt}) = \frac{\sigma^2}{3\sigma^2 + 4} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

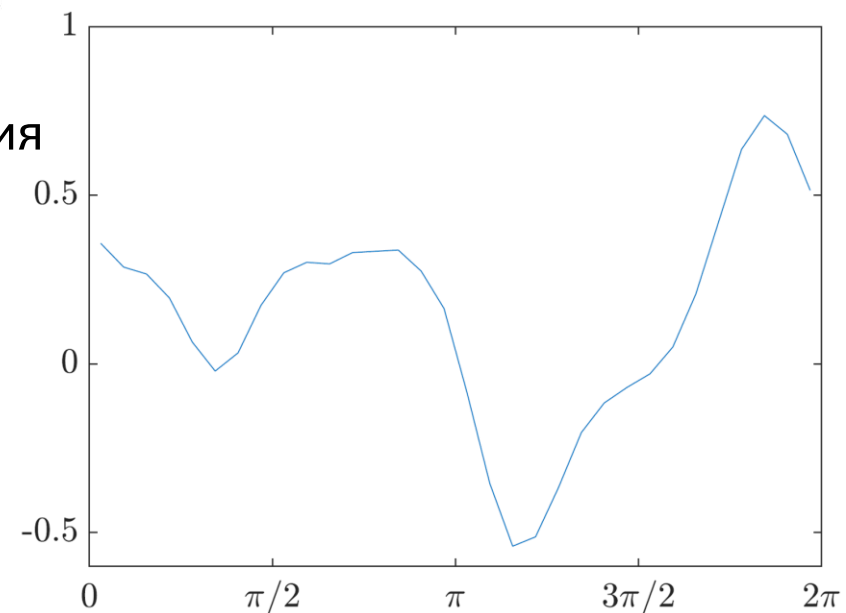
Метод Якоби эффективен, если переопределить понятие гладкости!

# Метод Якоби 2



Нечетные узлы сетки

Ошибка после применения  
нескольких итераций сглаживания



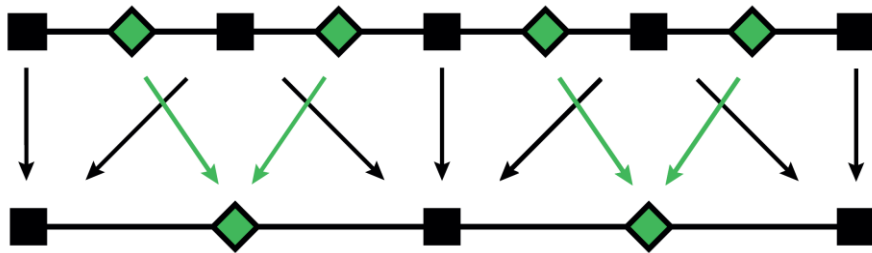
Четные узлы сетки

# Операторы перехода между сетками. 1D

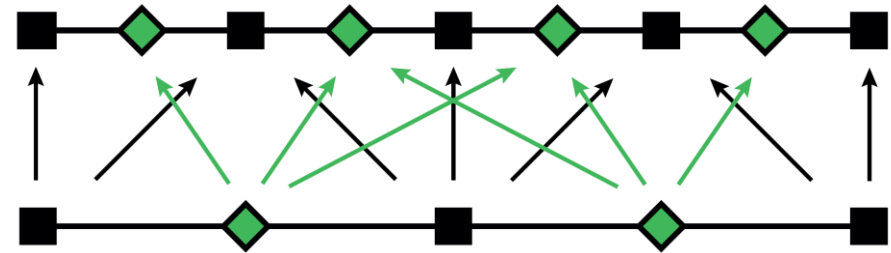
Модификация операторов перехода между уровнями многосеточного метода

- Операторы перехода должны использовать при вычислении только четные или только нечетные узлы сетки

Сгрубление



Продолжение



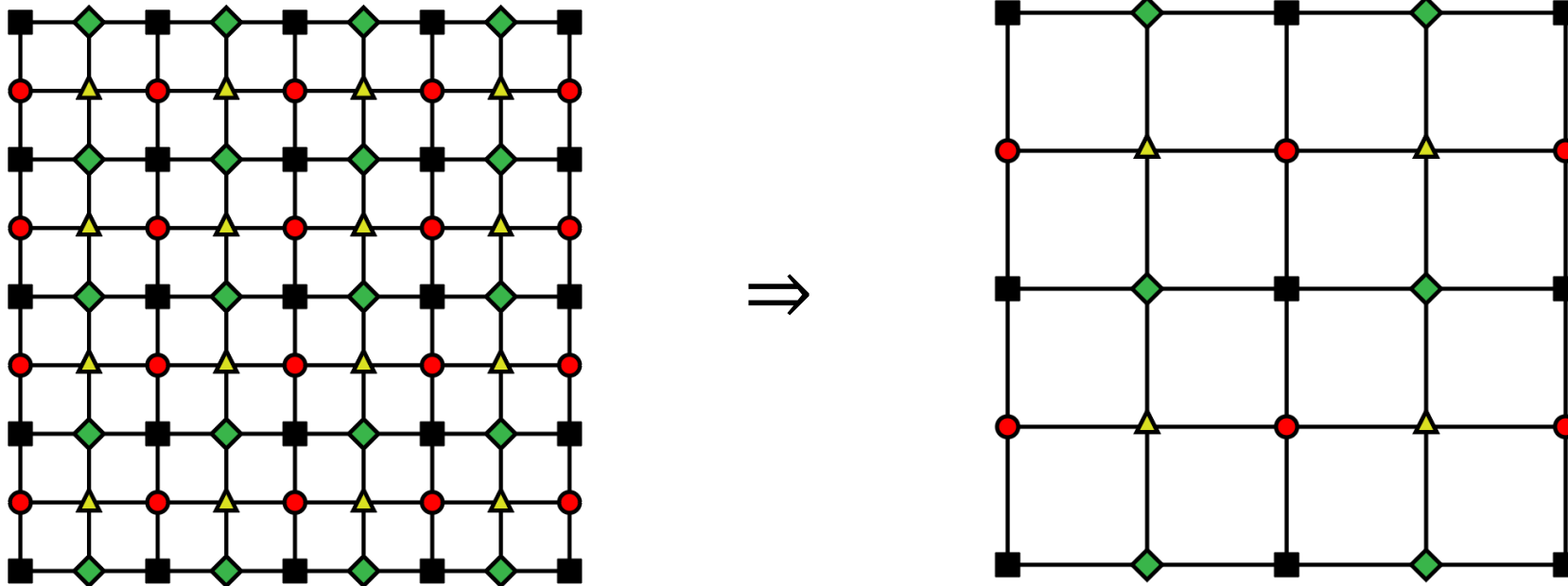
- Можно адаптировать стандартные cell-centered/vertex-centered операторы перехода

# Анализ модельного уравнения. 2D

- Пространственная аппроксимация на неразнесенной сетке

$$h_{i,j} - \Delta t^2 g H \left( \frac{h_{i+2,j} - 2h_{i,j} + h_{i-2,j}}{4\Delta x^2} + \frac{h_{i,j+2} - 2h_{i,j} + h_{i,j-2}}{4\Delta y^2} \right) = q_{i,j}$$

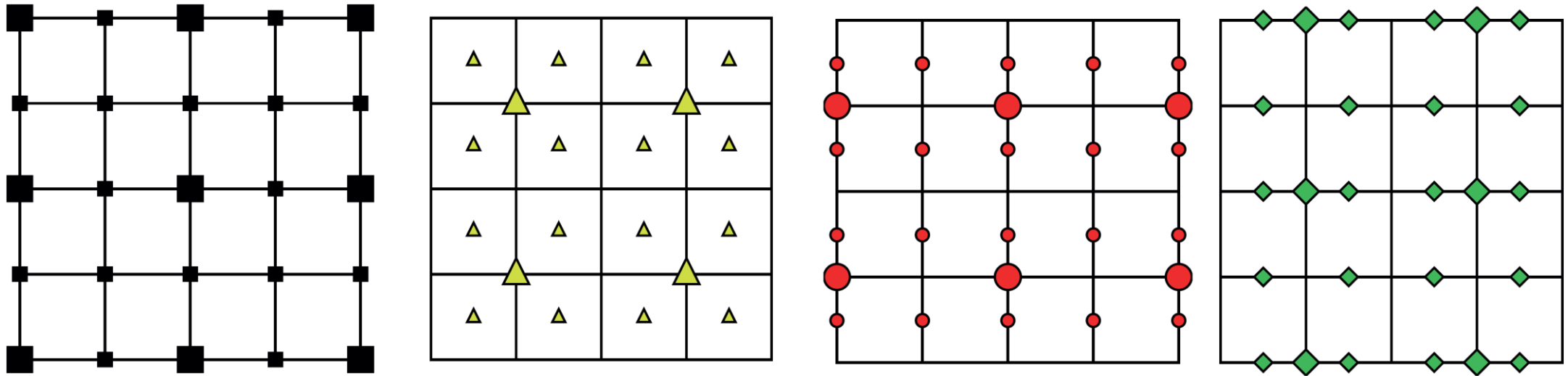
- Аналогично 1D случаю, неизвестные разделяются на 4 независимые подсистемы



# Операторы перехода между сетками. 2D

Модификация операторов перехода между уровнями многосеточного метода

- Операторы перехода могут быть построены как тензорное произведение одномерных операторов



# Численные эксперименты. Модельная задача

$$w - \nabla \cdot (\gamma \nabla w) = f$$

## Гномоническая равноугольная сетка кубическая сфера

Координаты узлов сетки определяются соотношением:

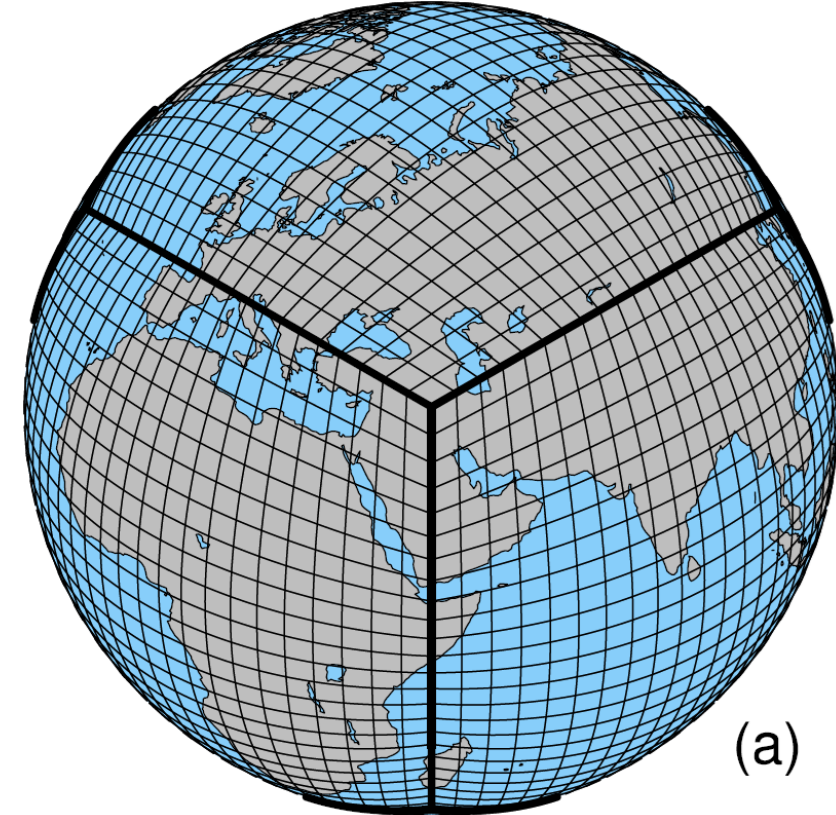
$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta}} (\tan \alpha \quad \tan \beta \quad 1)^T, \quad \alpha, \beta \in [-\pi/4, \pi/4]$$

## Дифференциальные операторы

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \vec{a}^\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \vec{a}^\beta \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial J v^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial J v^\beta}{\partial \beta} \right)$$

## Пространственная аппроксимация

Метод конечных разностей со свойством суммирования по частям (SBP FD) 2го/4го порядка



# Компоненты многосеточного метода

- Сглаживатель – трехчленные итерации Чебышева
- Операторы сгрубления – full-weighting/4-point cell average
- Операторы продолжения – билинейная интерполяция
- Построение матрицы на грубой сетке – редискретизация исходного уравнения
- Решатель на грубой сетке – несколько итераций сглаживателя

$$w - \nabla \cdot (\gamma \nabla w) = f$$

Число обусловленности системы определяется параметром  $\gamma$ :  $\frac{\gamma}{\max \Delta x^2}$

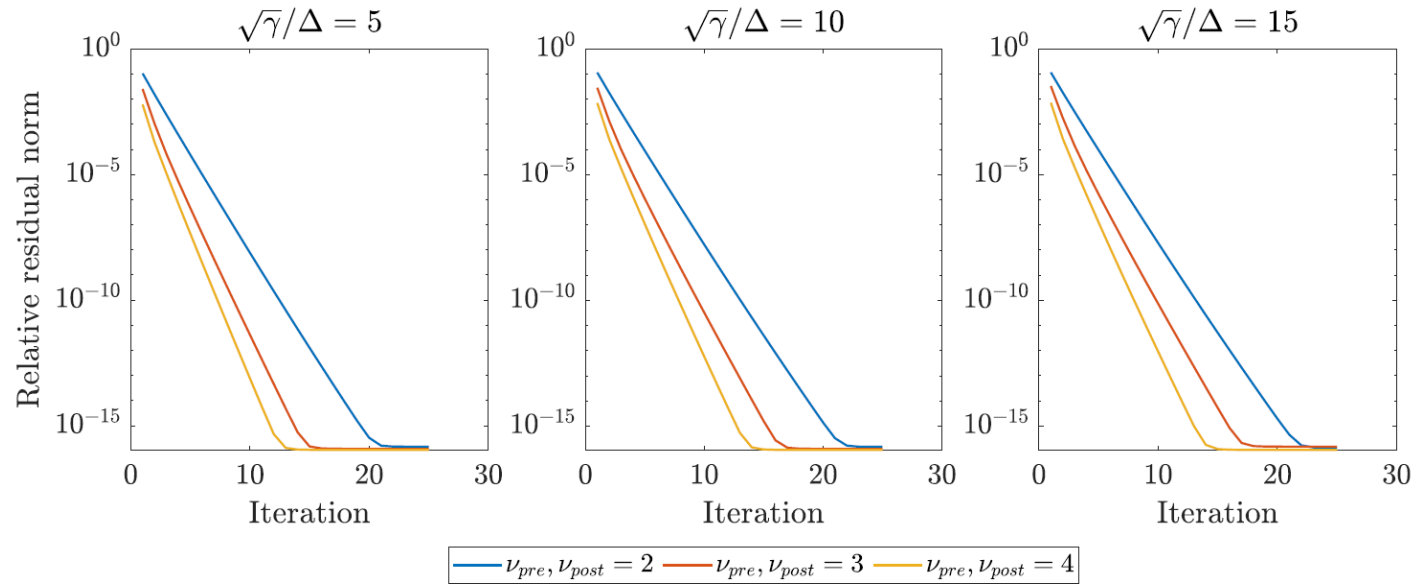
# Параметры экспериментов

Сходимость при варьировании:

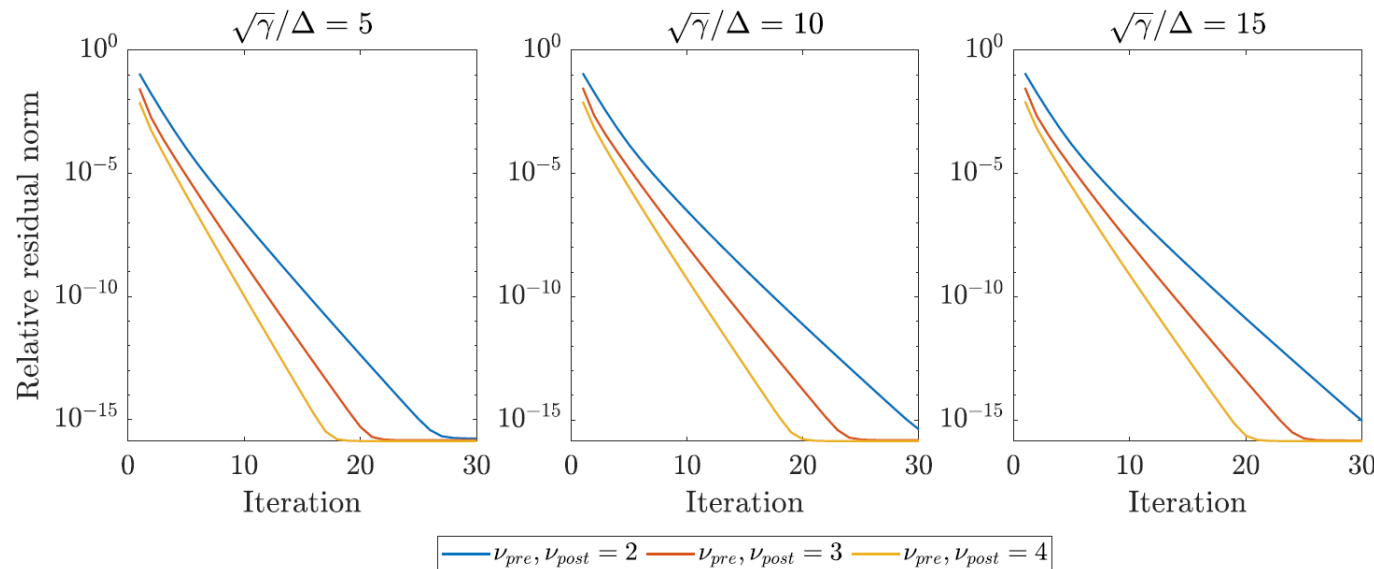
- количества итераций пред- и постсглаживания (2, 3, 4)
- параметра  $\frac{\gamma}{\max \Delta x} = \{5, 10, 15\}$
- Порядка аппроксимации схемы 2/4

Результаты осредняются по 100 запускам

# Численные эксперименты. Сходимость многосеточного метода



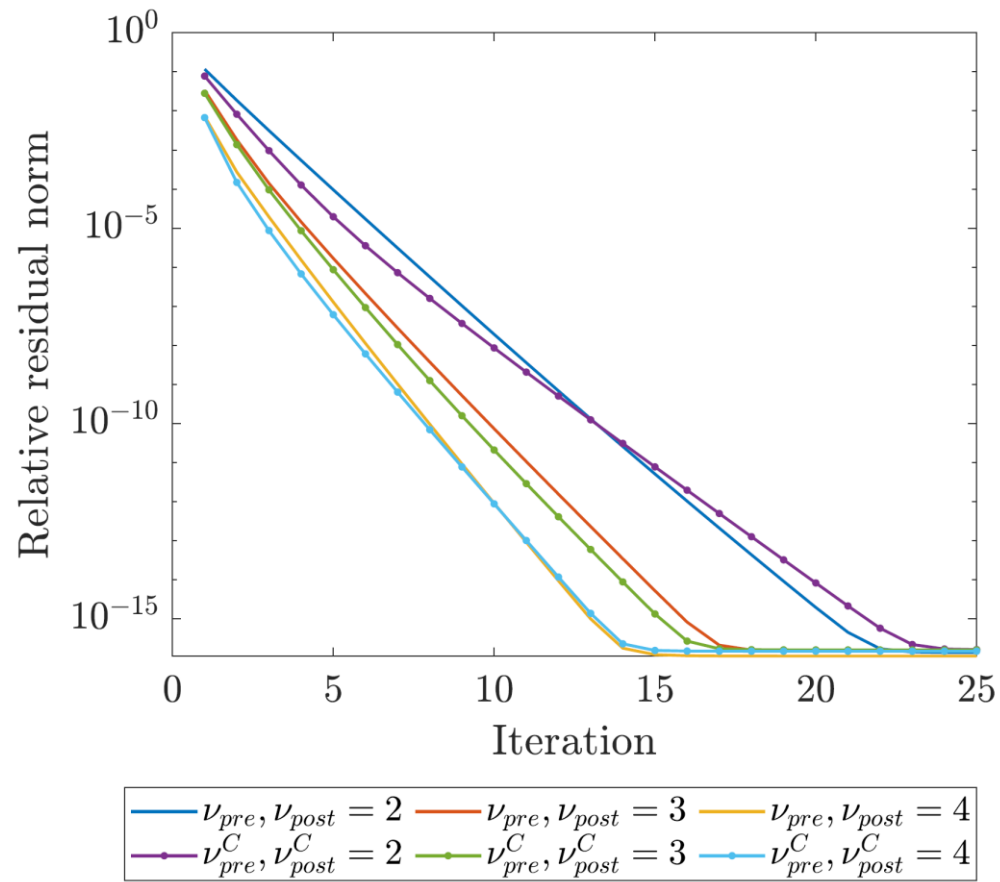
2<sup>nd</sup> order approximation



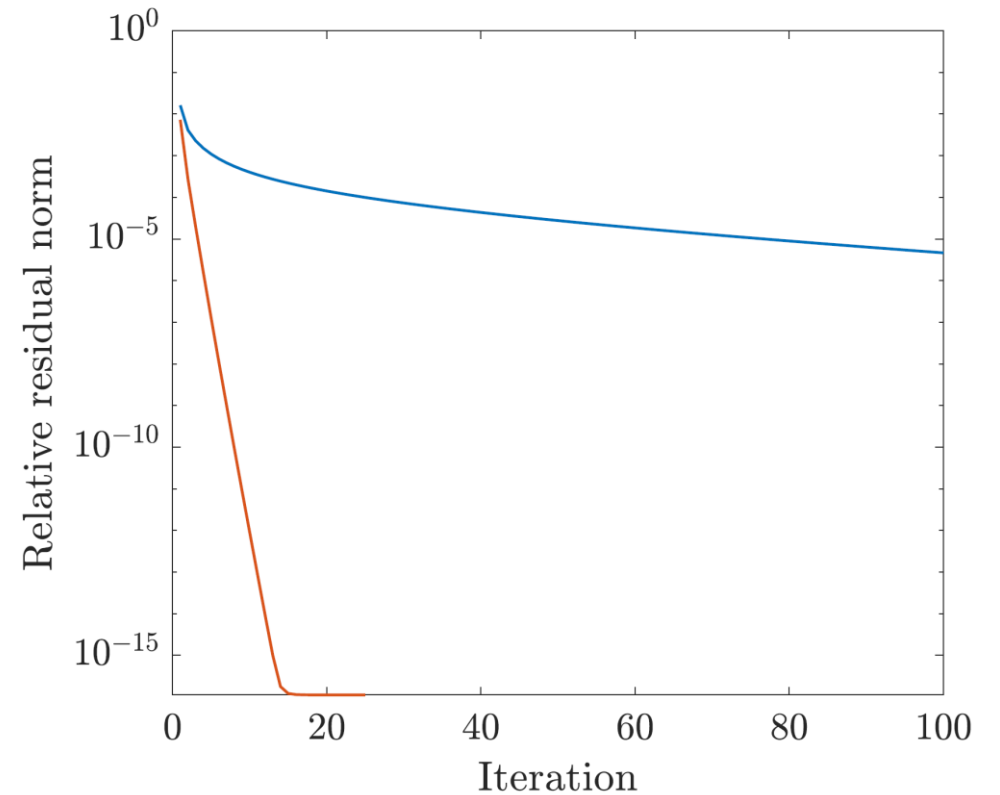
4<sup>th</sup> order approximation

Сходимость метода при различных значениях параметров  $\sqrt{\gamma}/\Delta$ ,  $\nu_{pre}$  и  $\nu_{post}$

# Численные эксперименты. Сходимость многосеточного метода



Сравнение скорости сходимости при использовании разнесенной и неразнесенной сеток



Сравнение скорости сходимости при стандартных (синяя линия) и специализированных (красная линия) операторах перехода

# Масштабируемость

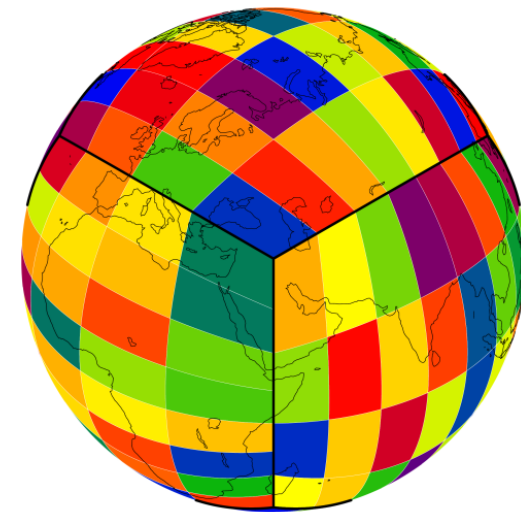
Cray XC40 (ГВЦ Росгидромета), Cray ARIES interconnect,  
Intel Xeon E2697v4 18-core CPUs, 36 CPU на узле.

Рассматриваются задачи с различным разрешением:

C288 – ~35 км,  $\sim 5 \times 10^5$  узлов сетки

C576 – ~17 км,  $\sim 2 \times 10^6$  узлов сетки

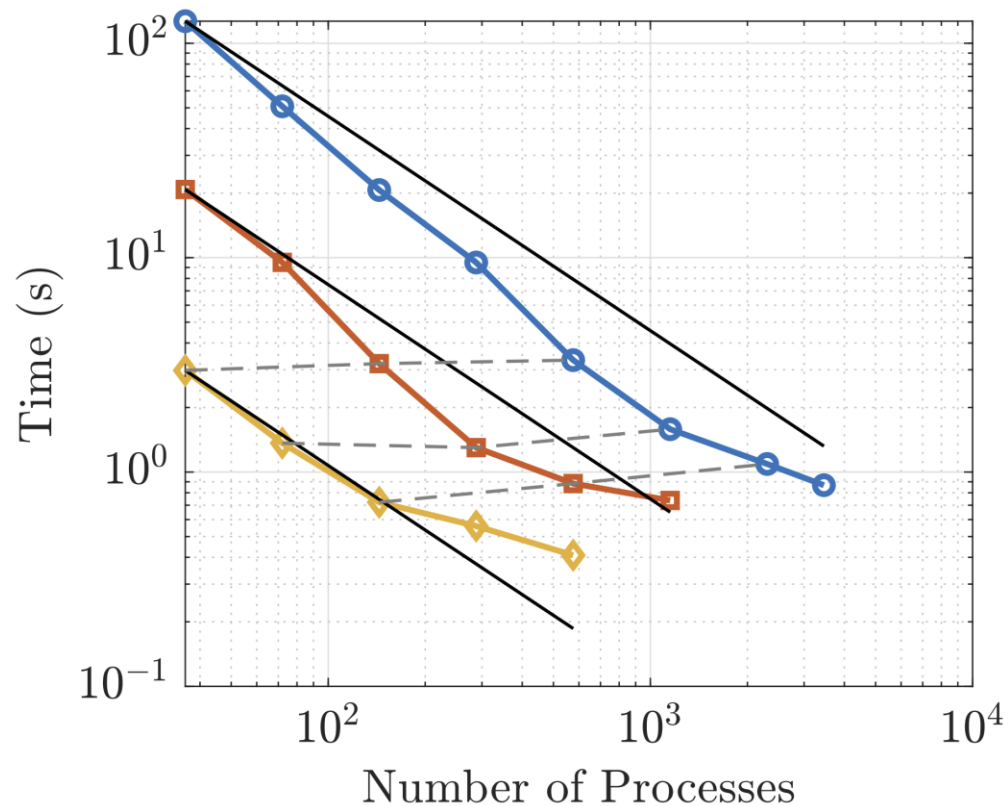
C1152 – ~8.5 км,  $\sim 8 \times 10^6$  узлов сетки



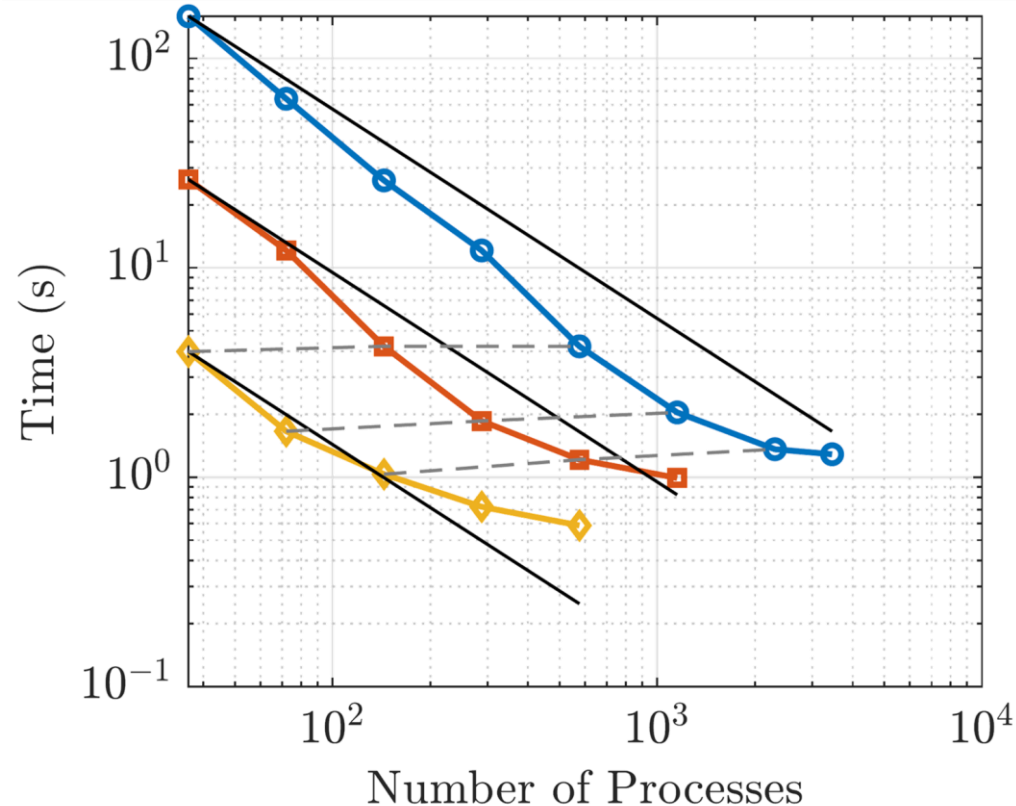
Разбиение кубической сферы на 192  
подобласти

# Масштабируемость

Аппроксимация 2го порядка



Аппроксимация 4го порядка



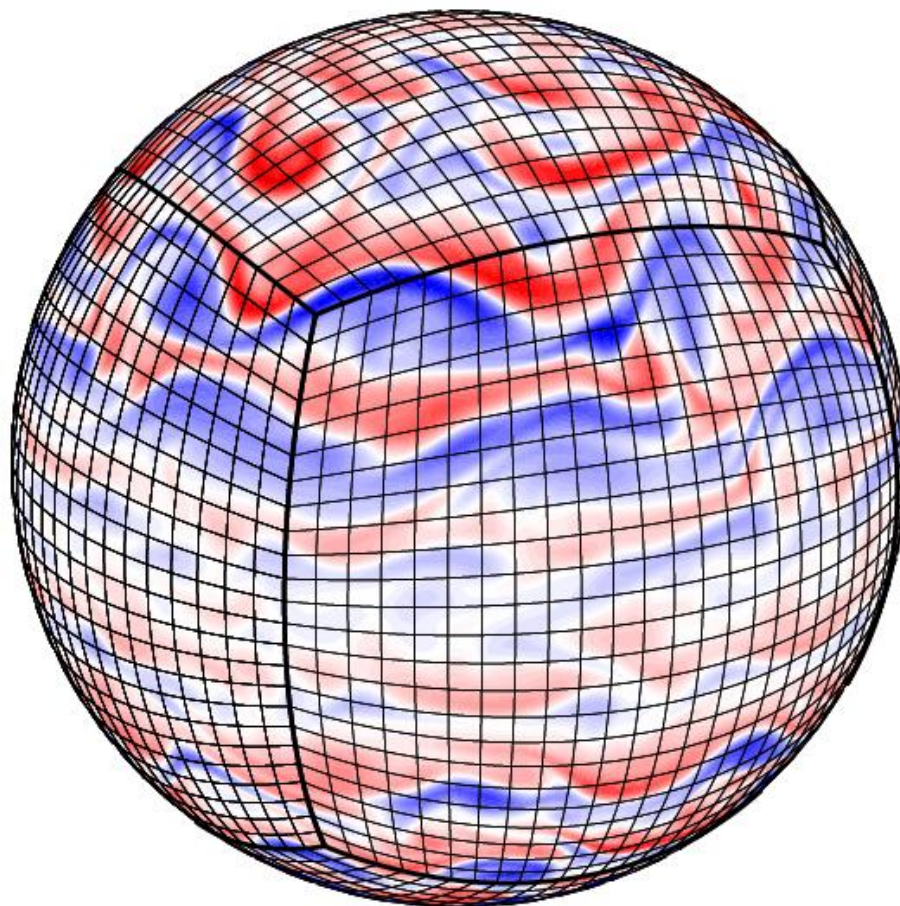
—○— C1152 —■— C576 —◇— C288 — Ideal Scaling

Задача с самым грубым разрешением – масштабируемость до 576 MPI-процессов  
(~30x30 узлов сетки на процесс)

# Выводы

- Геометрический многосеточный метод для пространственных аппроксимаций на неразнесенной сетке
- Свойства аналогичны стандартному подходу на сетке с разнесением
- Может применяться для других видов уравнений/задач
- Обобщения на другие типы сеток?

# Спасибо за внимание!



Работы выполнены при поддержке гранта РФФ  
№24-71-00123 (<https://rscf.ru/project/24-71-00123/>)

Гордей Гойман  
([gordeygoyman@gmail.com](mailto:gordeygoyman@gmail.com))

<https://gitlab.inm.ras.ru/vshashkin/ParCS>



# Горизонтальные аппроксимации

Метод конечных разностей со свойством суммирования по частям (SBP-FD):

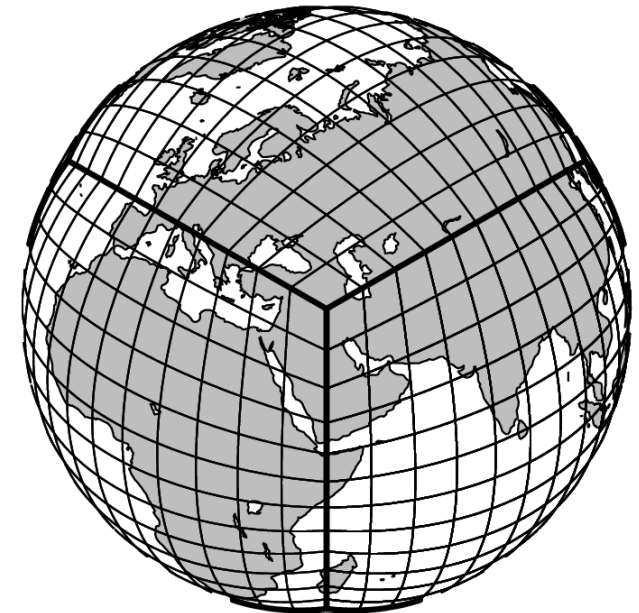
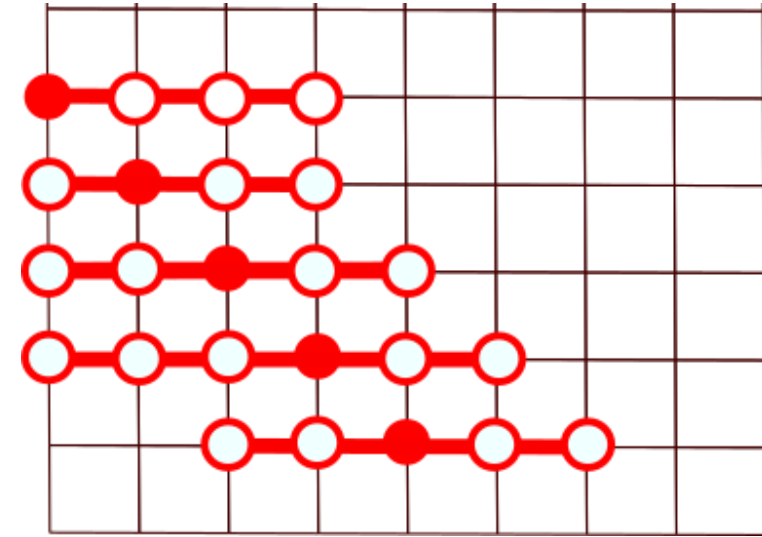
Подберем оператор дифференцирования на отрезке такой, что:

- Точен с порядком  $2p$  вдали от концов отрезка и  $p$  у границ
- Выполняется дискретный аналог соотношения:

$$\int_0^1 v \frac{\partial p}{\partial x} dx = -v(0)p(0) + v(1)p(1) - \int_0^1 v \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

## Результат:

- Существуют (известные) решения для  $p=1,2,3,4,5$
- Совпадают с обычными центральными разностями вдали от границы блока
- Специально подобранные аппроксимации у границ блоков
- Легко обобщается на случай блочно-прямоугольных сеток



# Анализ модельного уравнения. Сходимость

## Метод Рундсона

$$x^{k+1} = x^k + \omega r^k \quad \omega_{opt} = 2/(M + m) \quad k \geq \ln \varepsilon / \ln \frac{2\sigma^2}{1 + 2\sigma^2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \boxed{-2\sigma^2 \ln \varepsilon}$$

## Итерации

### Чебышева

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_{k+1} r^k + \beta_{k+1} (x^k - x^{k-1}) \quad \|e^k\| \leq \frac{1}{T_k \left( \frac{M+m}{M-m} \right)} \|e^0\| = \frac{2s^k}{1 + s^{2k}} \|e^0\| \quad s = \frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1}$$
$$k \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} -\sigma \ln \left( \frac{1 + \sqrt{-\varepsilon^2 + 1}}{\varepsilon} \right) \sim \boxed{-\sigma \ln \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

## Метод сопряженных градиентов (Крыловские методы)

$$\|e^k\|_A \leq 2 \left( \frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1} \right)^k \|e^0\|_A, \quad k \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \boxed{-\sigma \ln \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

# Анализ модельного уравнения. Многосеточный метод

## Основная идея:

- Устранение мелкомасштабной части ошибки (оператор сглаживания)
- Переход к более грубой сетке (оператор сгрубления)
- Решение СЛАУ на грубой сетке
- Интерполяция поправки решения на мелкую сетку (оператор продолжения)

**Сглаживатель** – метод Якоби с весом  $x^{k+1} = x^k + \omega D^{-1} r^k$

Скорость сходимости определяется скоростью сглаживания  $q$

$$q_{opt} = \frac{\sigma^2}{3\sigma^2 + 1} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Скорость сходимости не зависит от числа Куранта!}$$

# Многосеточный метод. Безматричный сглаживатель

**Сглаживатель** – оптимизация сходимости на мелкомасштабных компонентах ошибки

Пусть  $\lambda \in [m, s] \cup [s, M]$

$m, M$  – мин., макс. собственные значения матрицы системы

$s$  – с.з., соответствующее границе между разрешаемыми и неразрешаемыми на грубой сетке собственными векторами

**метод Рундсона (или итерации Чебышева)**

$$x^{k+1} = x^k + \omega r^k \quad \omega_{opt} = \arg \min_{\omega} \max_{\lambda \in [s, M]} |1 - \omega \lambda| = \frac{2}{s + M} \quad q_{opt} = \frac{M - s}{M + s}$$

требуется верхняя оценка максимального собственного значения

$M$

$s = \kappa \cdot M$ ,  $\kappa$  – свободный параметр

# Оценка спектрального радиуса

Многосеточный метод / итерации Чебышева – требуется верхняя оценка максимального собственного значения

Уравнение Гельмгольца с непостоянным фоновым профилем  $h_0$ :

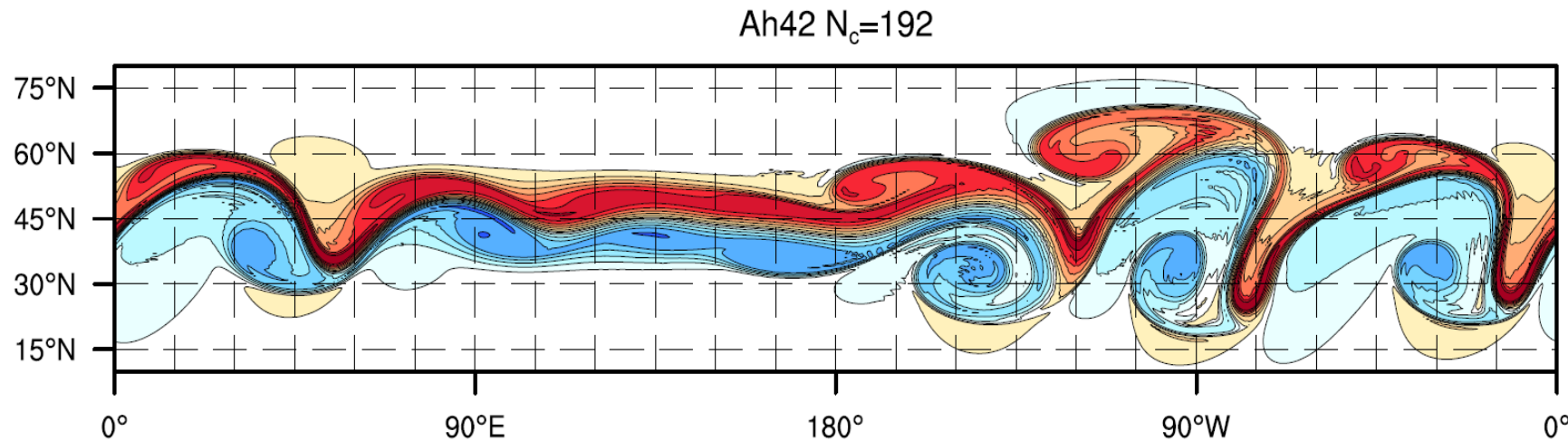
$$\delta h - \tau^2 \nabla \cdot (gh_0 \nabla (\delta h)) = R_h$$

Аппроксимация по пространству —  $\nabla \cdot h_0 \nabla \Rightarrow -Dh_0 \circ G$

$$\max_{\xi \neq \vec{0}} \frac{(-Dh_0 \circ G\xi, \xi)}{(\xi, \xi)} \leq \max_i (h_0)_i \frac{(-DG\xi, \xi)}{(\xi, \xi)} = \max_i (h_0)_i \lambda_{\max}(-DG)$$

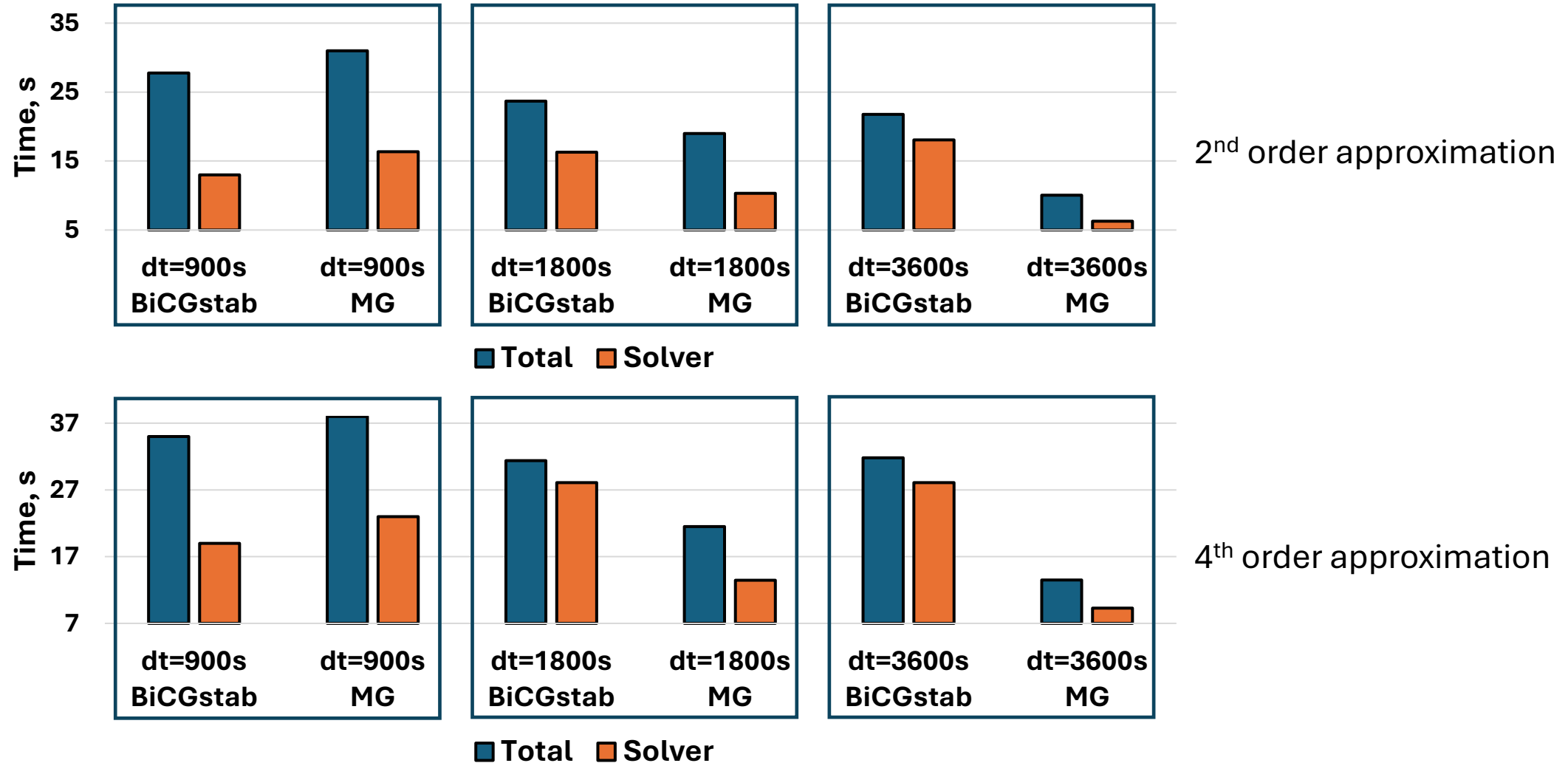
# Численные эксперименты. Модель мелкой воды на сфере

- Полунеявный полулагранжев метод
- Несмещенная сетка. Горизонтальное разрешение - C256 (~40 км)
- Расчет на 10 суток. Тест баротропная неустойчивость



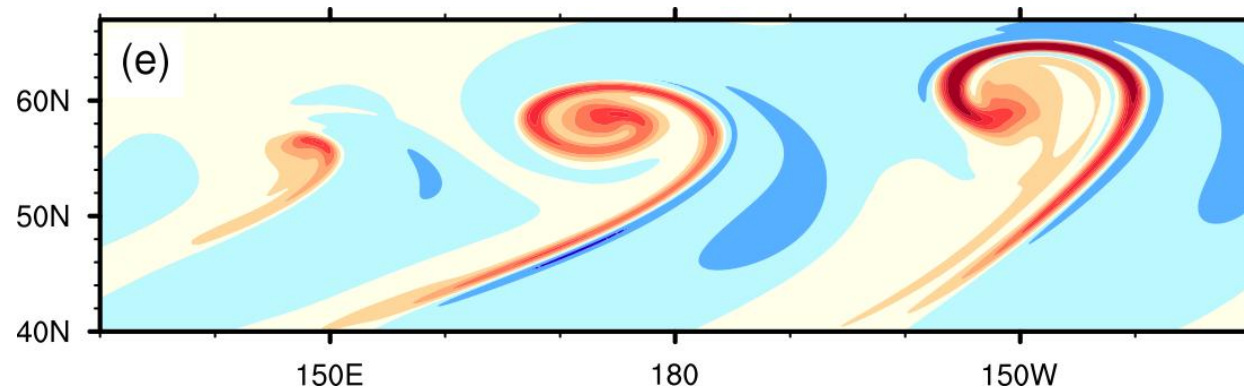
Поле относительной завихренности,  $T=144$  часов

# Численные эксперименты. Модель мелкой воды на сфере



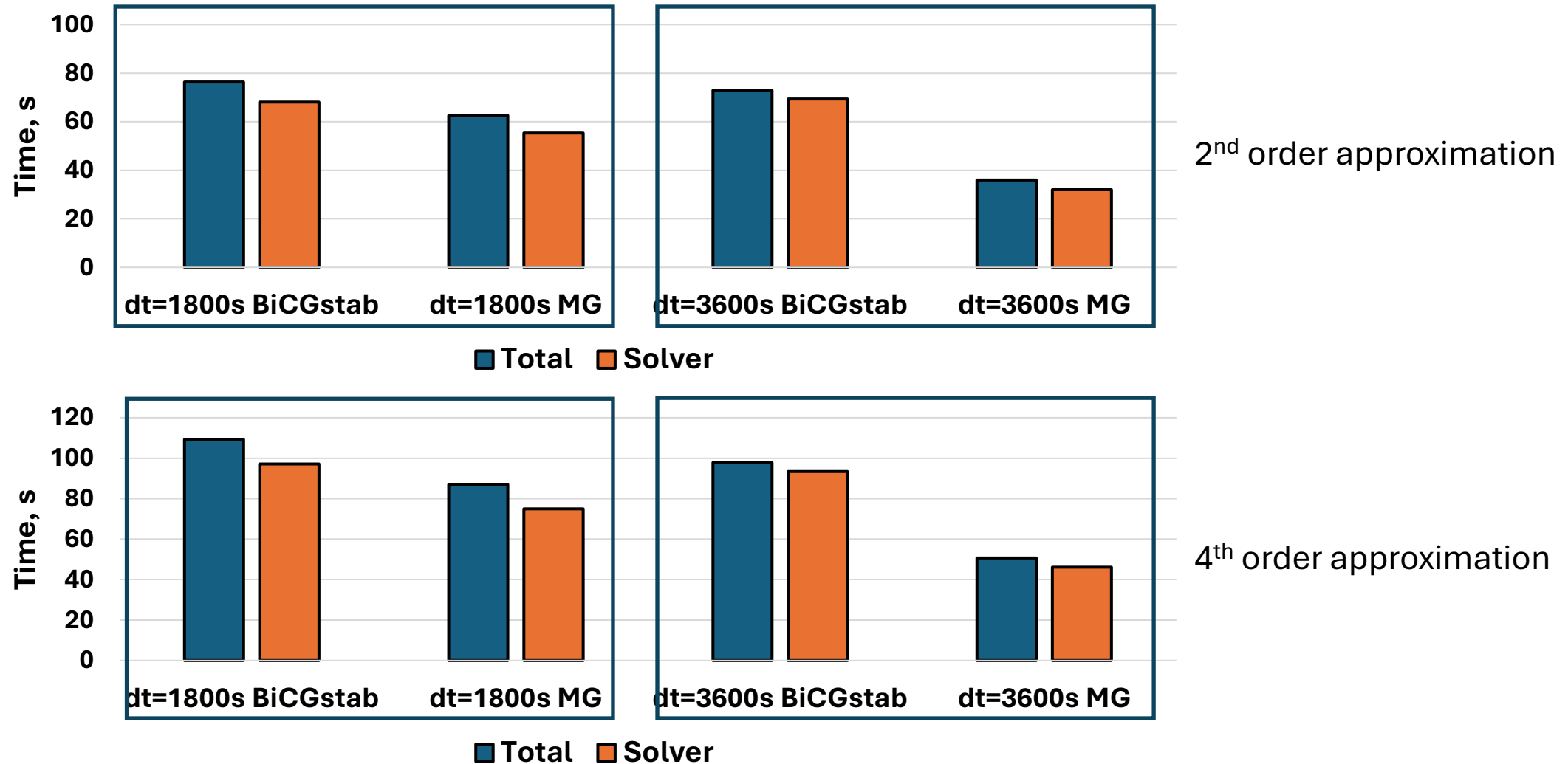
# Численные эксперименты. Негидростатическая модель

- Полунеявный полулагранжев метод
- Чарни-Филлипс по вертикали + несмещенная сетка по горизонтали. C128L30
- Расчет на 10 суток. Тест бароклинная неустойчивость



Поле относительной завихренности, поверхность  $P=850$  гПа,  $T=216$  часов

# Численные эксперименты. Негидростатическая модель



# Пример. Уравнения мелкой воды на сфере

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -(\xi + f)v^\perp - \nabla K - g\nabla h \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}h)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} &= A_{ex}\boldsymbol{\psi} + A_{im}\boldsymbol{\psi} \\ A_{ex}\boldsymbol{\psi} &= \begin{bmatrix} -(\xi + f)v^\perp - \nabla K \\ 0 \end{bmatrix} \\ A_{im}\boldsymbol{\psi} &= \begin{bmatrix} -g\nabla h \\ -\nabla \cdot (\mathbf{v}h) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Нужно уметь решать уравнения

вида  $(I - \gamma A_{im})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{r}$

Метод Ньютона + упрощение матрицы Якоби + дополнение по Шуру

$$\delta h - \gamma^2 \nabla \cdot (gh^{(k)} \nabla (\delta h)) = R_h$$