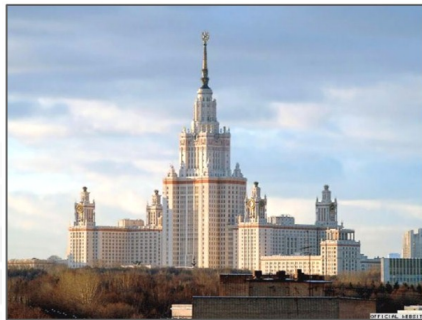




Iterative Methods for Solving Multi-coefficient Inverse Problems of Nondestructive Testing in Vector Elastic Models

А.В.Гончарский, С.Ю.Романов, С.Ю.Серёжников(докладчик)

Методы решения мульти-коэффициентных задач в векторной постановке

1 Применение

2 Постановка задачи

- Уравнение динамической теории упругости
- Схема эксперимента
- Градиентный метод
- Сопряжённая задача

3 Численный метод

- Разностная аппроксимация
- Градиенты
- GPU-реализация
- Производительность и масштабируемость

4 Модельные расчёты

- Схема эксперимента
- Моделирование распространения волн

5 Восстановление параметров Ламэ

- Определение λ , μ при заданной плотности
- Влияние диаграммы направленности

6 Восстановление скоростей волн

- Тест разрешающей способности

7 Выводы



Геофизика и сейсморазведка

- Ограниченное кол-во источников и детекторов на поверхности и в скважинах
- Диапазон частот 10 – 100 Гц
- Размер области ≈ 10 длин волн
- Горные породы

Неразрушающий контроль

- 100+ источников, 1000+ точек измерения, повторяемость эксперимента
- Диапазон частот 1 – 5 МГц
- Размер области 50+ длин волн
- Композитные материалы, металлы

Постановка задачи

Уравнение динамической теории упругости

Уравнение упругости относительно вектора смещений частиц имеет вид:

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \{u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x})\}$ – вектор смещения частиц,

$\rho(\mathbf{x})$ – массовая плотность среды,

$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ – вектор силы источника возмущений в точке $\mathbf{q}$. $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q})\mathbf{g}(t)$

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}))$ – тензор напряжений 2×2 , операция div применяется по строкам тензора,

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 2\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) + \lambda(\mathbf{x})\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \mathbf{I}$,

где $\mu(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициенты Ламэ, $\mathbf{I}$ – единичная матрица 2×2 .

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & 0.5(u_y + v_x) \\ 0.5(v_x + u_y) & v_y \end{bmatrix}$$

► Уравнение для ρ, λ, μ принимает вид:

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div} (\mu(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x})\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Постановка задачи

Схема эксперимента

► Задача – определить коэффициенты уравнения в области G

$\rho(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \epsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$
 $\mathbf{u}|_{t=0} = 0, \mathbf{u}_t|_{t=0} = 0$ (или начальные/граничные условия), $\mathbf{f}|_G = 0$.

Для $s \in S$: $\mathbf{u}(t, s; q_j; \mu, \lambda, \rho) = \mathbf{U}(t, s; q_j)$ — данные на детекторах.

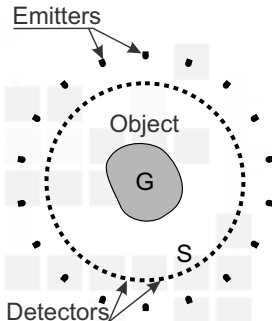
Источники расположены в точках $\mathbf{q}_j, j = 1 \dots M$

► Приближённое решение – минимум функционала невязки

$$\Phi(\mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \int_0^T \int_S (\mathbf{u}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho) - \mathbf{U}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j))^2 d\mathbf{s} dt.$$

Набор коэффициентов, при котором функционал достигает минимума, принимается за приближённое решение обратной задачи.

$$(\bar{\mu}(\mathbf{x}), \bar{\lambda}(\mathbf{x}), \bar{\rho}(\mathbf{x})) : \min_{\mu, \lambda, \rho} \Phi(\mu, \lambda, \rho) = \Phi(\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\rho}).$$



Постановка задачи

Градиентный метод

► Градиенты функционала невязки можно вычислить в явном виде

$$\Phi_{\mu}(\mathbf{x}; \mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \int_0^T \varepsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) : \varepsilon(\mathbf{w}_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) dt,$$

$$\Phi_{\lambda}(\mathbf{x}; \mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \int_0^T \operatorname{div}(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) \cdot \operatorname{div}(\mathbf{w}_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) dt,$$

$$\Phi_{\rho}(\mathbf{x}; \mu, \lambda, \rho) = \sum_{j=1}^M \int_0^T (u_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho), \mathbf{w}_t(t, \mathbf{x}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)) dt,$$

где $\mathbf{w}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho)$ — решение следующей сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{w}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{w}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) = \\ = \mathbf{u}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho) - \mathbf{U}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j); \quad \mathbf{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{w}_t|_{t=T} = 0. \end{aligned}$$

Постановка задачи

Сопряжённая задача

► Прямая и сопряжённая задачи

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{u}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{u}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

$$\rho(\mathbf{x})\mathbf{w}_{tt}(t, \mathbf{x}) - 2 \operatorname{div}(\mu(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{w}(t, \mathbf{x}))) - \nabla(\lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{w}(t, \mathbf{x})) = \mathbf{u}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j; \mu, \lambda, \rho) - \mathbf{U}(t, \mathbf{s}; \mathbf{q}_j);$$

$$\mathbf{w}|_{t=T} = 0, \quad \mathbf{w}_t|_{t=T} = 0.$$

► Метод обратного распространения невязки

- В качестве источника в сопряжённой задаче выступает разность измеренного и рассчитанного волнового поля.
- Разностный сигнал распространяется в обратном времени от детекторов к объекту.
- Отличия параметров модели от измеренного объекта являются источниками разностного сигнала, которые можно найти.

Численный метод

Разностная аппроксимация

► Аппроксимация частных производных

$$u_x = u \otimes [1, -8, 0, 8, -1]/(12 \, dx), \quad \text{где } \otimes - \text{свёртка}$$

$$u_{xx} = u \otimes [-1, 16, -30, 16, -1]/(12 \, dx^2), \quad u_{xy} = (u_x)_y$$

► Расчёт конечно-разностным методом последовательно по времени

$$u_{(t+1)} = \frac{dt^2}{\rho} ((\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)_x u_x + \mu_y(u_y + v_x) + \lambda v_{yx} + \lambda_y v_y) + \\ + 2u_{(t)} - u_{(t-1)} + f^{(x)};$$

$$v_{(t+1)} = \frac{dt^2}{\rho} ((\lambda + 2\mu)v_{yy} + \mu(v_{xx} + u_{yx}) + (\lambda + 2\mu)_y v_y + \mu_x(v_x + u_y) + \lambda u_{xy} + \lambda_x u_x) + \\ + 2v_{(t)} - v_{(t-1)} + f^{(y)}; \quad \mathbf{f} = \{f^{(x)}, f^{(y)}\}, \quad \mathbf{u} = \{u, v\}$$

Разностная схема требует хранения двух слоёв по времени $u_{(t-1)}$ и $u_{(t)}$, затем $u_{(t+1)}$ замещает $u_{(t-1)}$.

Численный метод

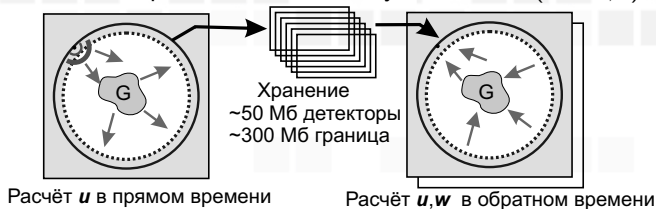
Градиенты

► Градиенты вычисляются по разностным формулам

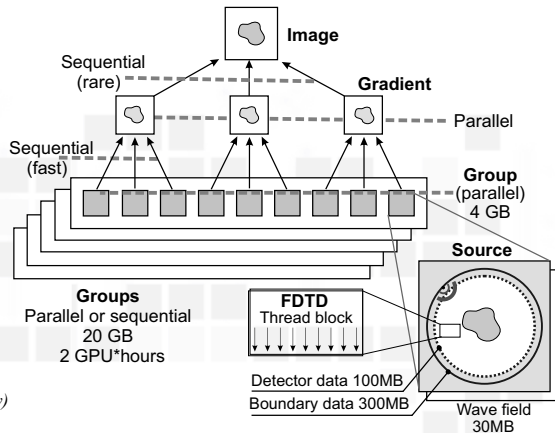
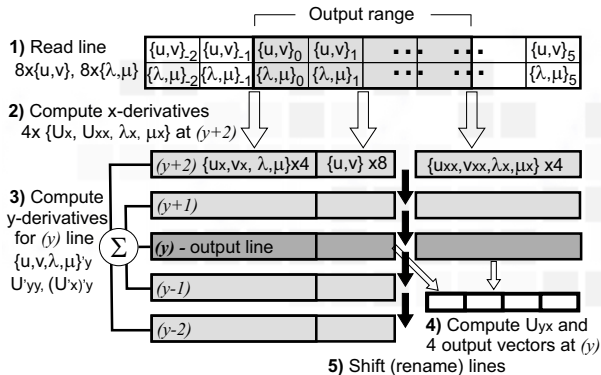
$$\Phi_{\mu} = \sum_t u_x w_x + v_y z_y + \frac{1}{2}(u_y + v_x)(w_y + z_x); \quad \Phi_{\lambda} = \sum_t (u_x + v_y)(w_x + z_y);$$
$$\Phi_{\rho} = \sum_t (u_t w_t + v_t z_t), \quad u_t = (u_{(t+1)} - u_{(t)})/dt. \quad \mathbf{u} = \{u, v\}, \quad \mathbf{w} = \{w, z\}$$

► Расчёт градиентов проводится в обратном времени

Поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ запоминается на границе S : $W(\mathbf{s}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{s} \in S, t)$, затем рассчитывается в обратном времени вместе с сопряжённой волной и условиями $\mathbf{u}(\mathbf{s} \in S, t) = W(\mathbf{s}, t)$.



Численный метод GPU-реализация

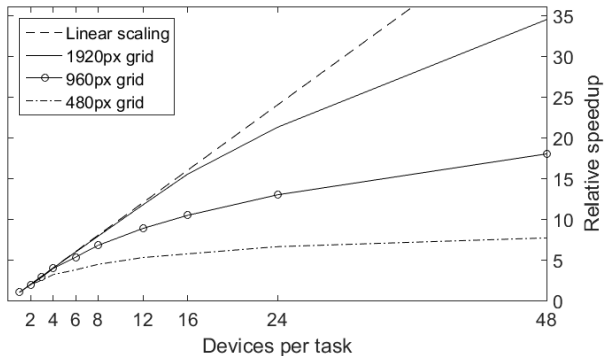
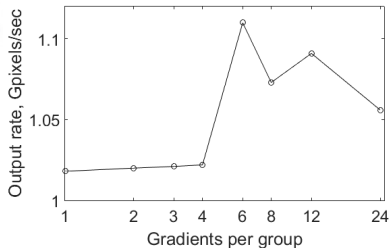
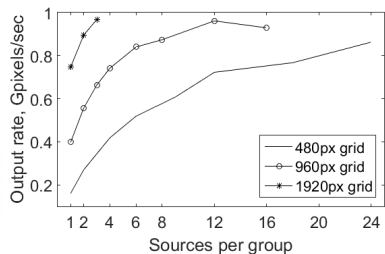


- Размер сетки – 960×960
- Шагов по времени – 6400

- Объём данных – 5 Гб / узел
- Время – 2...3 GPU-часа (25...35 итераций)

Численный метод

Производительность и масштабируемость



► Задача масштабируется практически линейно при условии достаточной загрузки GPU

Модельные расчёты

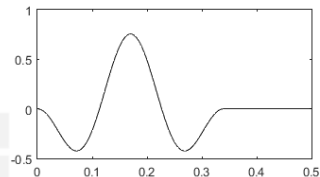
Схема эксперимента



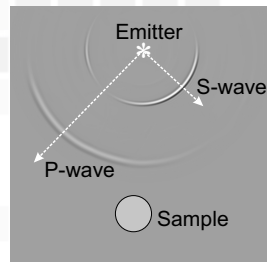
Расчётная область

Параметры расчётов

- Шаг сетки 0.05 мм, 2.5 нс
- Время регистрации 16 мкс
- Расчётная область 48мм
- Кольцо детекторов 36мм
- Область решения 25мм
- Кол-во источников – 45
- Излучение –
под 45° к радиусу
- Параметры алюминия
- Продольная волна –
1.5 мм, 6.4 мм/мкс
- Поперечная волна –
0.68 мм, 2.9 мм/мкс

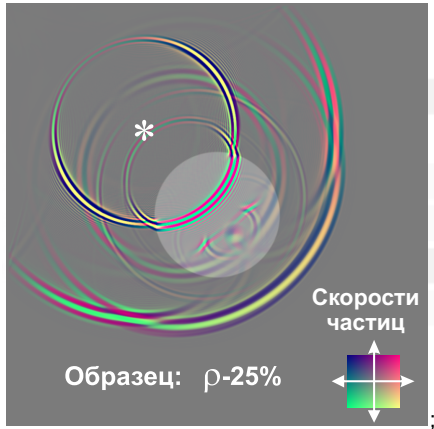


Зондирующий импульс 5 МГц



Модельные расчёты

Моделирование распространения волн



► Математическая модель передаёт отражение, преломление и преобразование типов волн в неоднородной среде

► Параметры материала:

ρ , λ , μ — плотность и коэффициенты Ламэ

ρ , $Vp = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $Vs = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости волн

ρ , $Ip = \rho \cdot Vp$, $Is = \rho \cdot Vs$ — импедансы

► Скорости волн Vp , Vs изменяют фазу волны и сильнее всего влияют на выходной сигнал

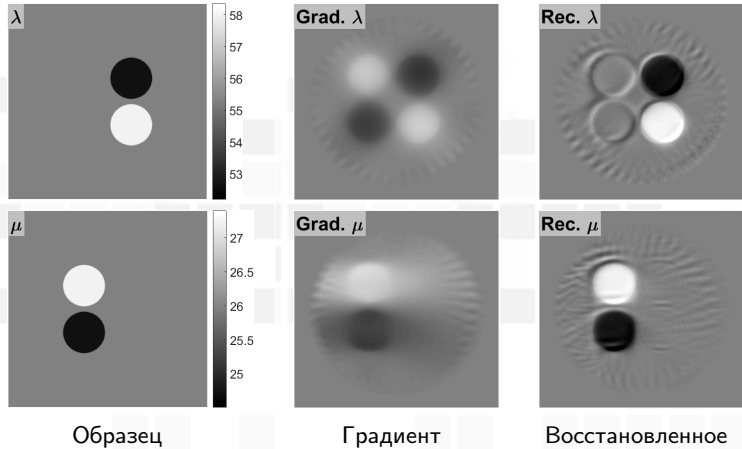
Восстановление параметров Ламэ

Определение λ , μ при заданной плотности

► Регистрируется
продольная и
поперечная волна.

Длительность
регистрации 16 мкс.

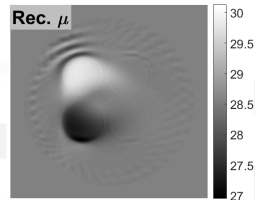
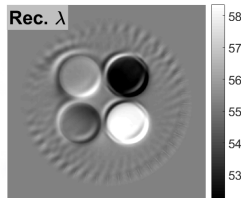
$\rho = 2700 \text{ г/см}^3$ (алюминий)
 $\mu = 25.95 \text{ ГПа} \pm 5\%$
 $\lambda = 55.27 \text{ ГПа} \pm 5\%$



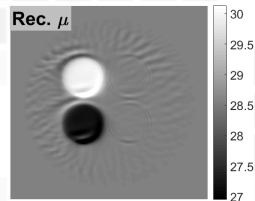
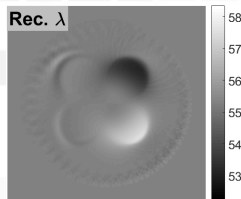
Восстановление параметров Ламэ

Влияние диаграммы направленности

- Источники развёрнуты продольной волной к центру



- Источники развёрнуты поперечной волной к центру



Восстановленное λ

Восстановленное μ

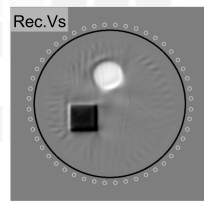
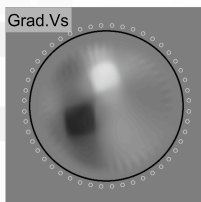
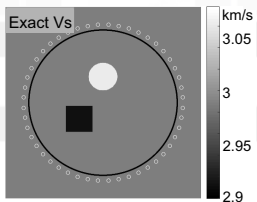
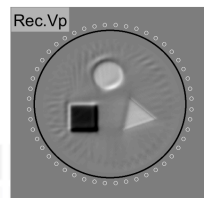
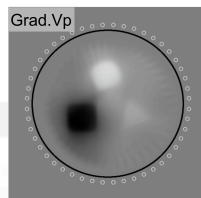
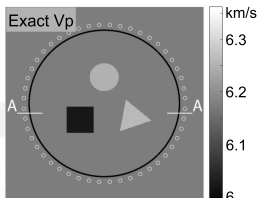
Восстановление скоростей волн

► Варьируются все 3 параметра среды

$$\rho = 2700 \text{ г/см}^3 \pm 5\%$$

$$\mu = 25.95 \text{ ГПа} \pm 5\%$$

$$\lambda = 55.27 \text{ ГПа} \pm 5\%$$



Образец

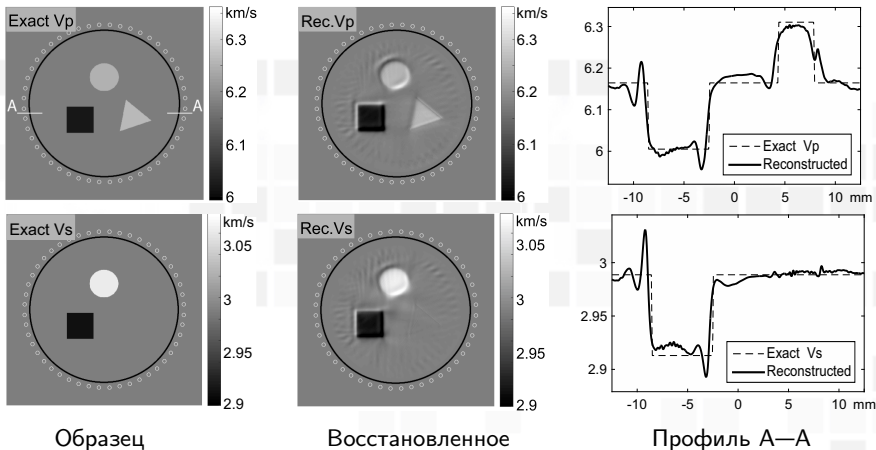
Градиент

Восстановленное

Восстановление скоростей волн

Тест разрешающей способности

► Разрешающая способность – порядка половины длины волны



Выводы

- Градиентный метод позволяет устойчиво восстановить скорости продольных и поперечных волн. Можно восстанавливать 2 из 3 коэффициентов Ламэ ρ, λ, μ
- При использовании продольной и поперечной волны важна диаграмма направленности излучателей. Для получения качественного изображения необходимо использовать несколько десятков источников и несколько сотен детекторов. Детекторы регистрируют вектор смещения.
- Метод имеет высокую вычислительную сложность. Время расчёта пропорционально кол-ву источников и размеру области в кубе.

Работа поддержана грантом РФФ №25-11-00089.

Наш сайт <http://inverseproblems.ru>



Спасибо за внимание!