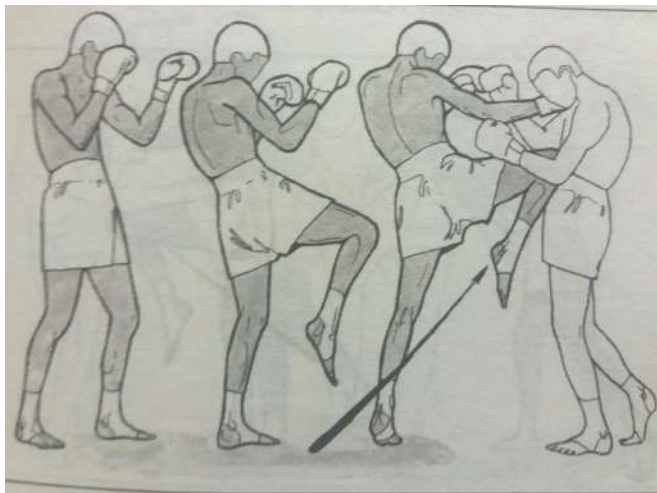
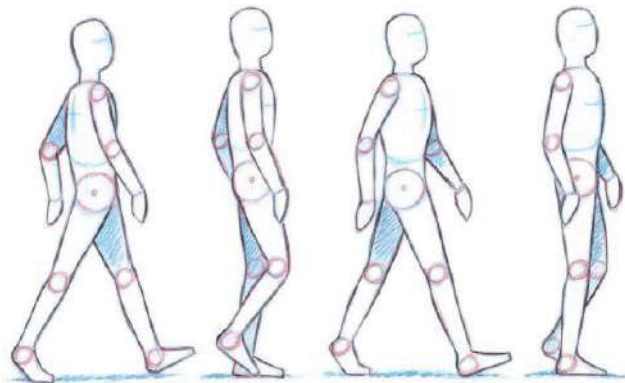


Моделирование динамических воздействий на коленный сустав человека с использованием многоблочных и наложенных сеток и параллельных вычислений

Н.А. Волков, Н.И. Хохлов, И.Б. Петров

Введение



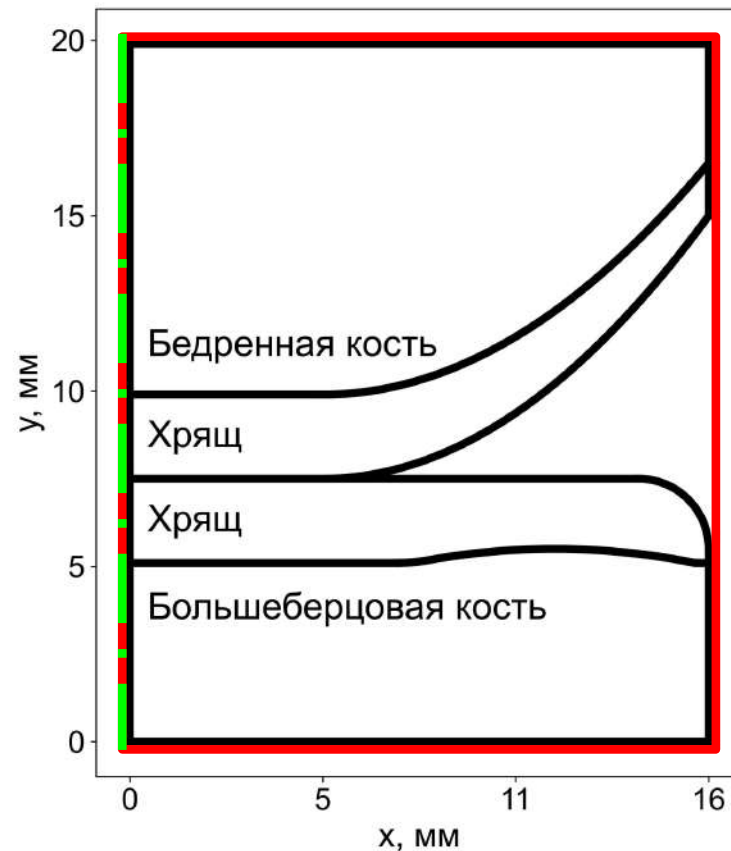
Цели и задачи

Цель: разработка двумерной численной модели коленного сустава и рассчитать распространение волн с использованием сеточно-характеристического метода и параллельных вычислений.

Задачи:

1. Разработать двумерную модель коленного сустава;
2. Построить расчетную сетку с использованием многоблочного подхода и наложенных структурированных сеток;
3. Разработать и протестировать алгоритм разбиения сеток между MPI процессами;
4. Провести расчеты воздействия на сустав динамических нагрузок.

Модель



Модель линейно-упругой деформируемой среды

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, & i \in \{1, 2\} \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \lambda \sum_{k=1}^2 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), & i, j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

ρ – плотность, v_i – скорость точки среды, σ_{ij} – тензор напряжений, f_i – внешние силы, λ, μ – параметры Ламе, δ_{ij} – символ Кронекера

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 A_j \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_j} = \vec{F},$$

$\vec{U} = (v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ – вектор неизвестных,

A_j – квадратные матрицы, $\vec{F}$ – вектор правой части

Сеточно-характеристический метод

$$\vec{U}_t + A_1 \vec{U}_x + A_2 \vec{U}_y = \vec{0}$$

Расщепление по направлениям

$$\vec{U}_t + A_1 \vec{U}_x = \vec{0}$$

$$\vec{U}_t + A_2 \vec{U}_y = \vec{0}$$

Инварианты Римана

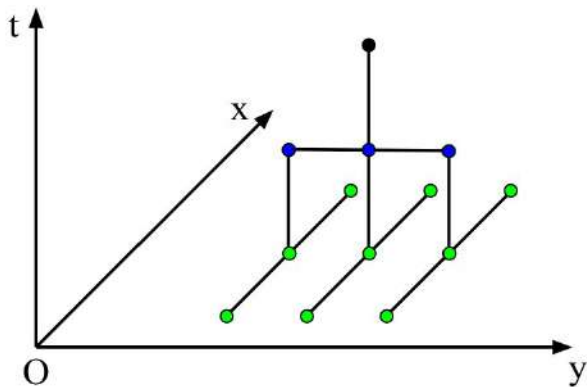
$$A_i = \Omega_i^{-1} \Lambda_i \Omega_i = \text{const}$$

$$\vec{U}_t + \Omega_1^{-1} \Lambda_1 \Omega_1 \vec{U}_x = 0$$

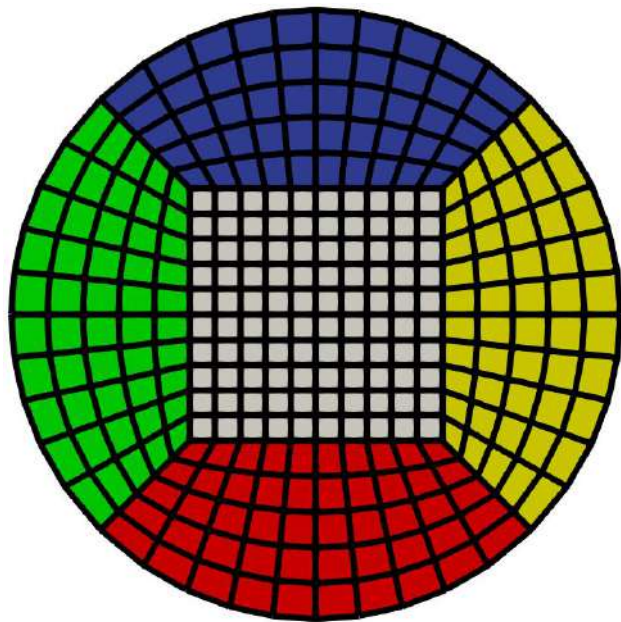
$$\vec{u} = \Omega_1 \vec{U}$$

Скалярные уравнения

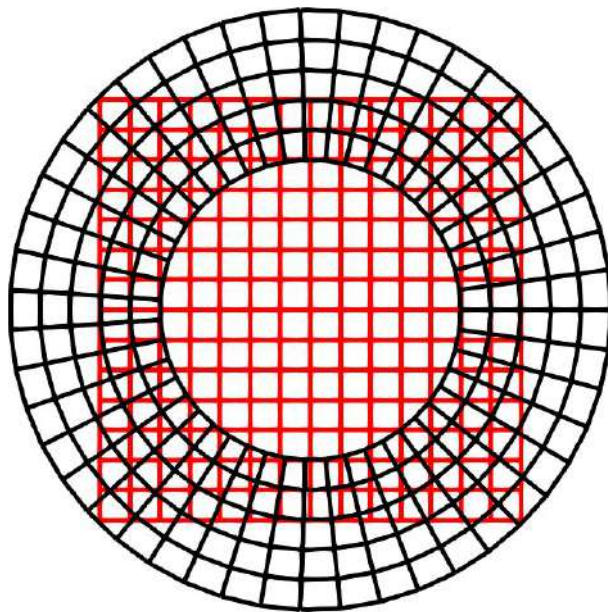
$$u_t + \lambda u_x = 0$$



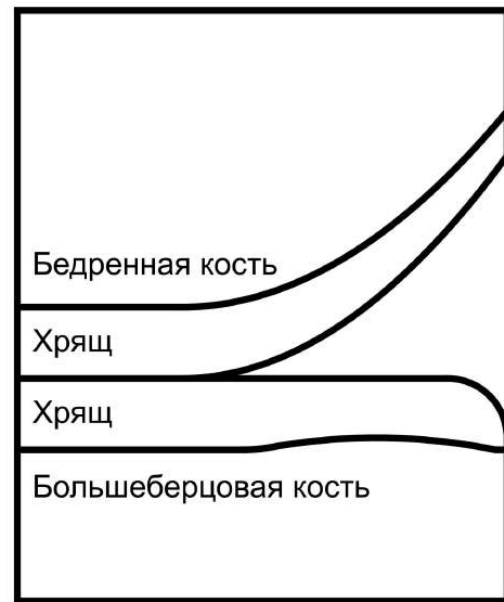
Расчетная сетка



Блочно-
структурированная



Наложенная



Расчетная сетка. Алгоритм построения

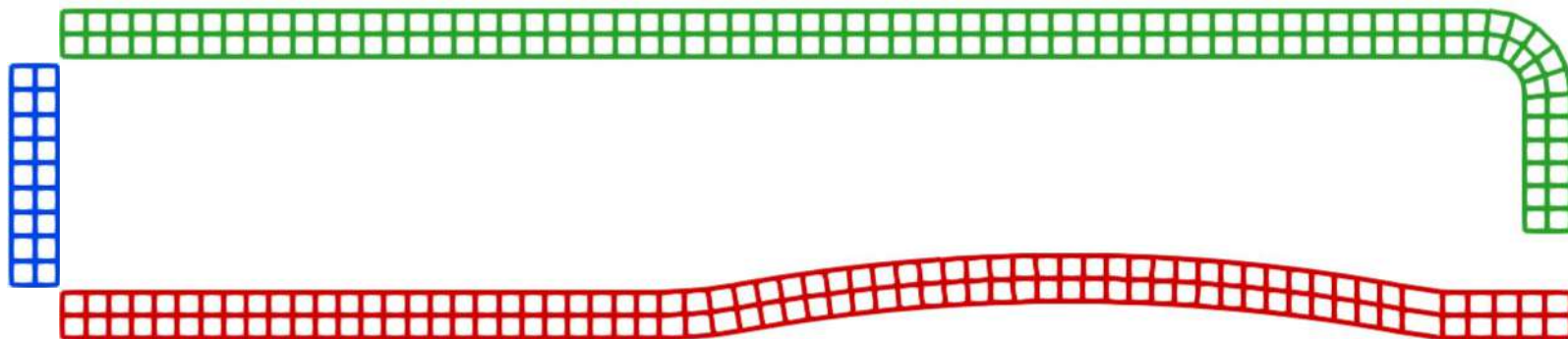
1. Геометрия области



2. Гладкие сегменты границы



3. Сетки для сегментов



Расчетная сетка. Алгоритм построения

5. Фоновая сетка

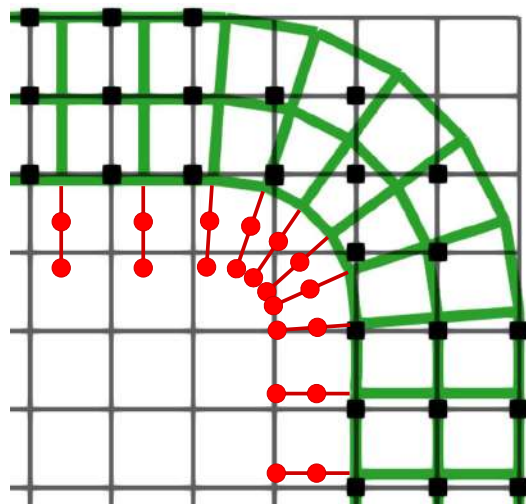


6.* Оптимизация сетки

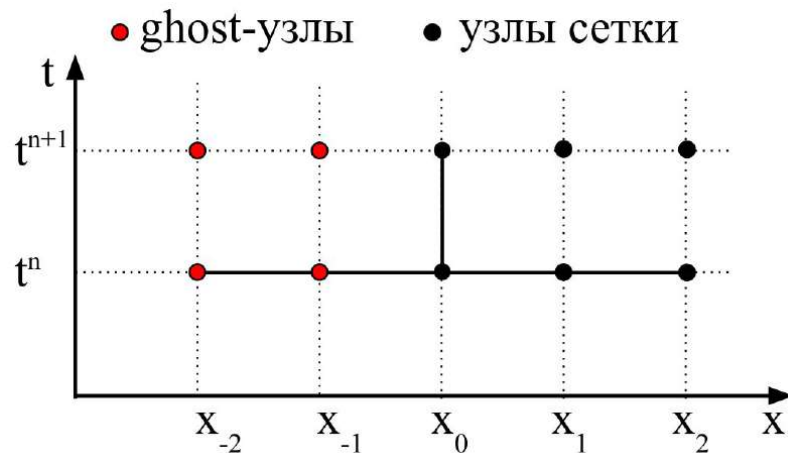


Расчетная сетка. Сшивки

- Интерполяция между сетками одной анатомической структуры

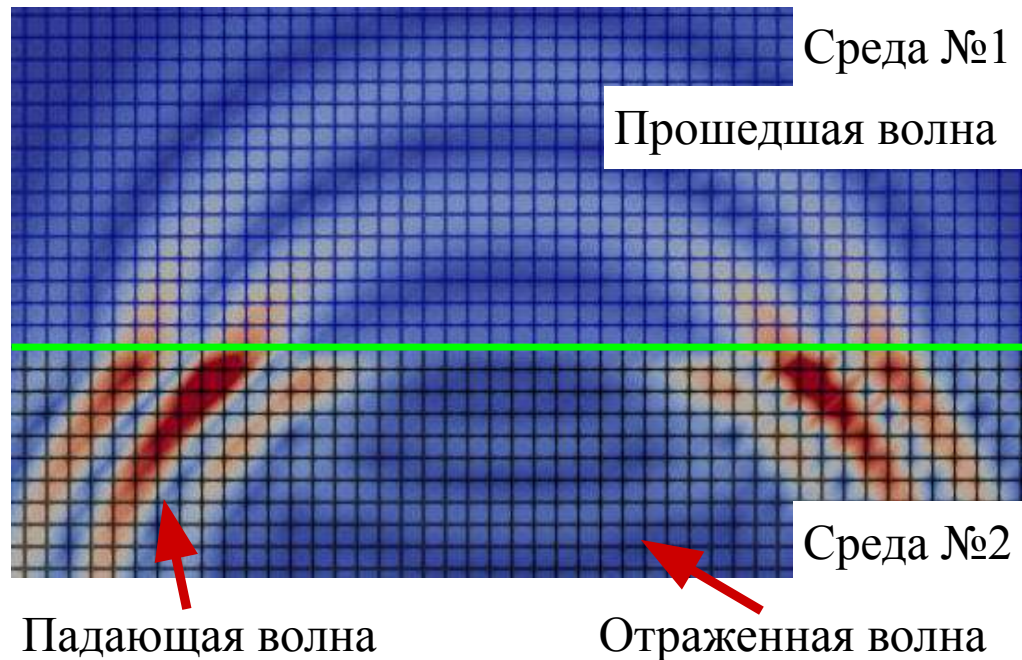


■ узлы фоновой сетки
● ghost-узлы контурной сетки

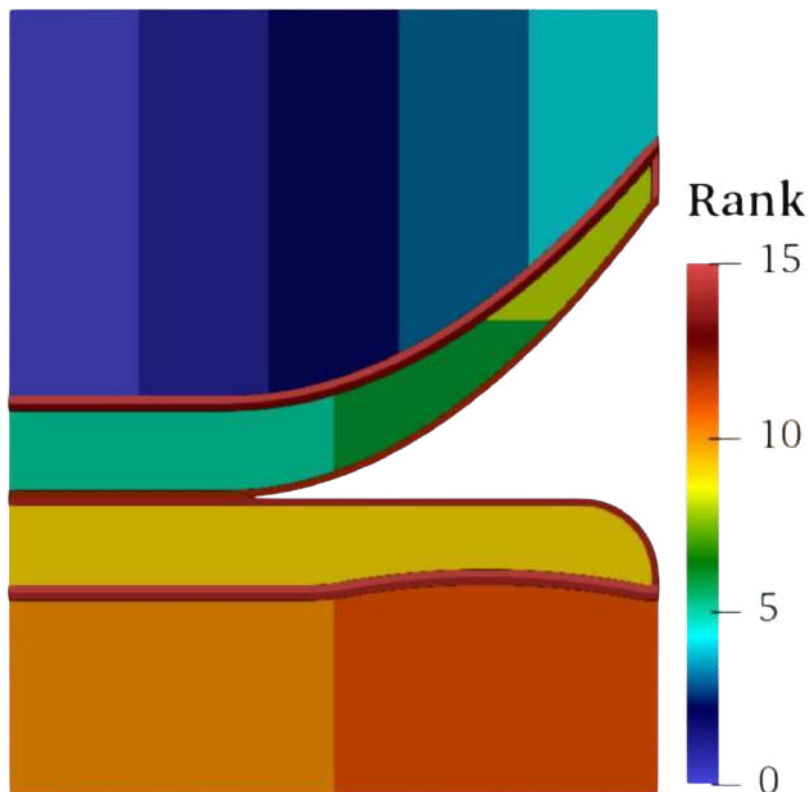


Расчетная сетка. Сшивки

- *Условия контакта* между сетками разных анатомических структур



Декомпозиция расчетной области



1. Вычисление оптимального количества узлов

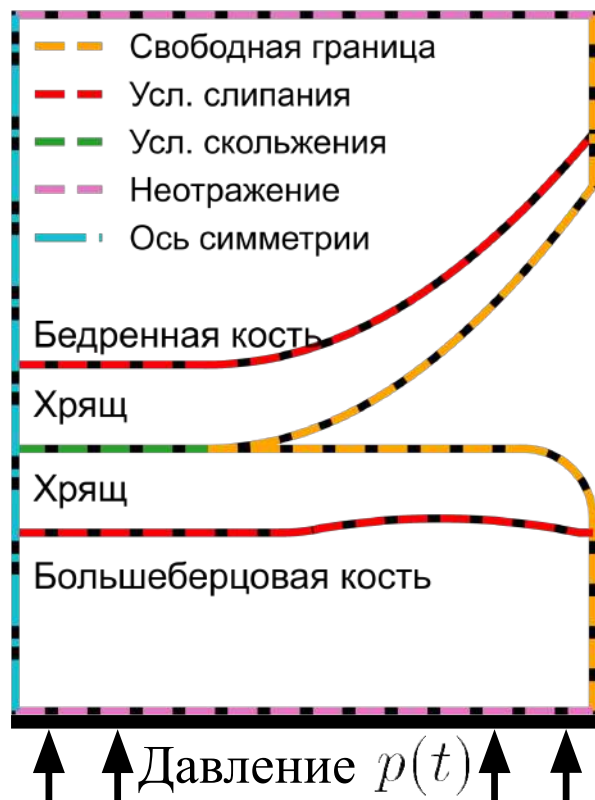
$$M_{\text{opt}} = \left(\sum_{i=1}^N n_i + a \cdot \sum_{j=1}^M m_j \right) / P$$

2. Разбиение MPI процессов для больших сеток

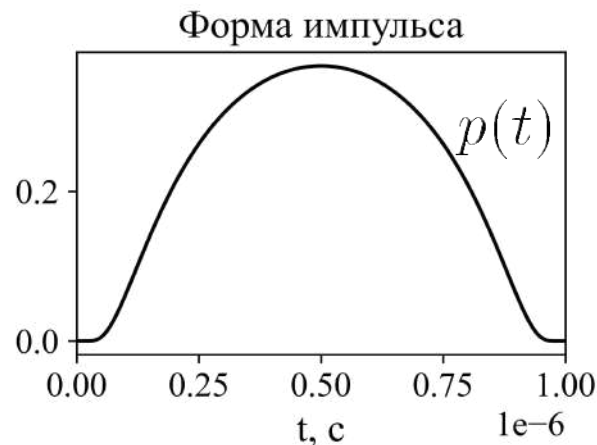
$$P_i = \left\lfloor \frac{n_i}{M_{\text{opt}}} \right\rfloor \quad P_j = \left\lfloor \frac{a \cdot m_j}{M_{\text{opt}}} \right\rfloor$$

3. Разбиение оставшихся сеток по оставшимся процессам

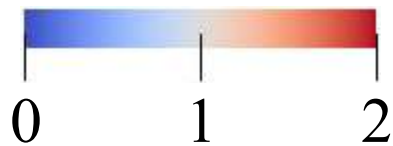
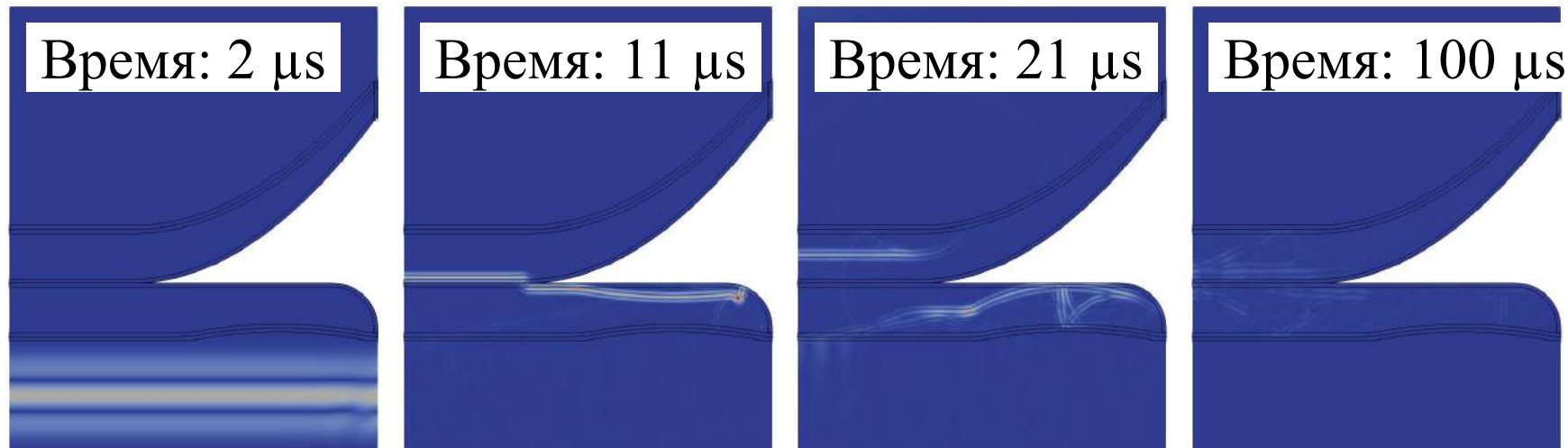
Постановка задачи



Компонент	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона	Плотность, кг/м ³
Бедренная кость	20000	0,220	2000
Берцовая кость	18400	0,120	2000
Хрящ	15	0,475	1000
Мениск	20	0,450	1500



Результаты моделирования



$V, \text{ м/с}$

Ускорение

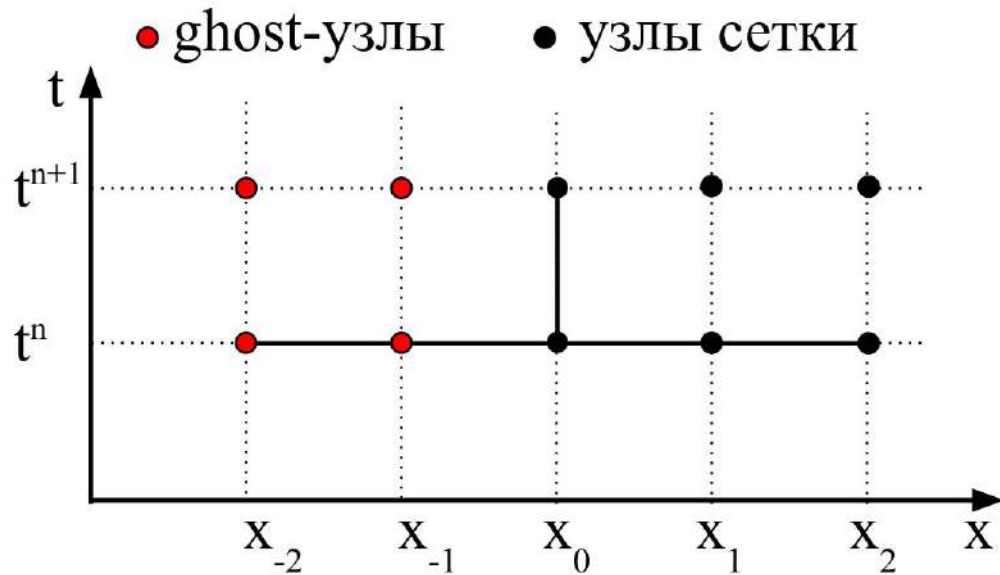


График ускорения. (2 процессора AMD EPYC 7663).

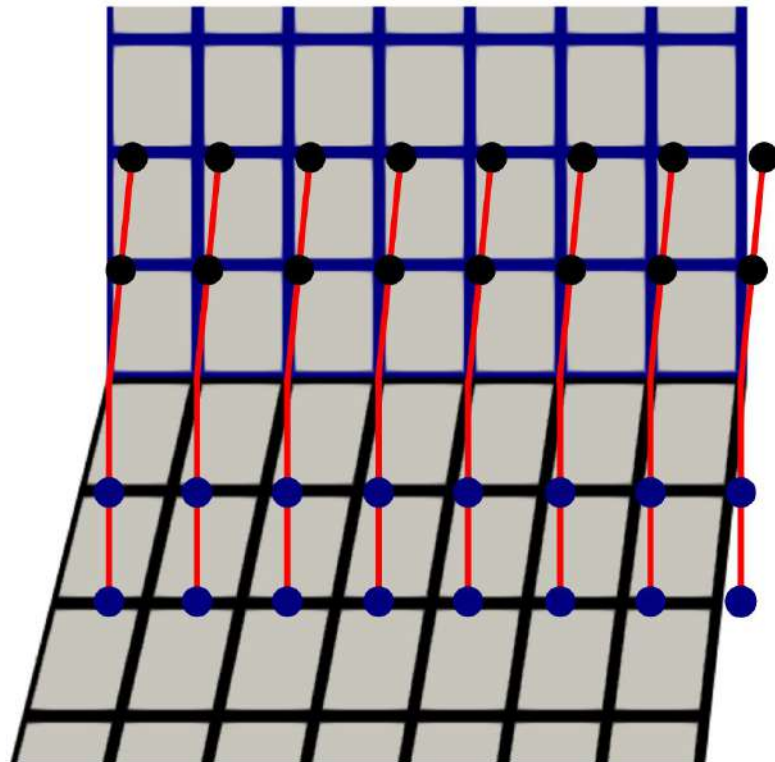
Выводы

1. Разработана численная модель коленного сустава в двумерной постановке;
2. Выполнено моделирование распространения волн сеточно-характеристическим методом;
3. Продемонстрировано ускорение прикладного расчета с использованием MPI.

Ghost-узлы



- ghost-узлы верхней сетки
- ghost-узлы нижней сетки
- продолжение ребер



Граничные условия

тел существует два типа граничных условий [11]. В первом случае задается значение силы $\vec{f}$ на границе

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{f}, \quad (24)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали границы.

Второй тип граничного условия связан с заданием скорости $\vec{v}_0$ на границе

$$\vec{v} = \vec{v}_0. \quad (25)$$

Помимо этих граничных условий, в работе использовались условия свободной границы [12]. Чтобы задать это условие, необходимо в выражении (24) положить внешние силы равными нулю $\vec{f} = 0$:

$$\sigma \cdot \vec{n} = \vec{0}, \quad (26)$$

Еще применялось контактное условие полного сцепления между границами раздела поверхности двух сред:

$$[\vec{v}] = \vec{0}, \quad (27)$$

$$[\sigma \cdot \vec{n}] = \vec{0}. \quad (28)$$

Квадратными скобками $[\]$ здесь обозначен скачок величины на границе раздела поверхности двух сред.

Отражение

$$u_{M+1}^n = u_M^n = u_{M-1}^n,$$

$$u_{-2}^n = u_{-1}^n = u_0^n$$